

# 四元数を用いた画像符号化方式の検討 A Study on Image Coding with Quaternion

石川 孝明<sup>†</sup> 渡辺 裕<sup>‡</sup>  
Takaaki ISHIKAWA<sup>†</sup> Hiroshi WATANABE<sup>‡</sup>

<sup>†</sup> 早稲田大学 国際情報通信研究センター <sup>‡</sup> 早稲田大学 国際情報通信研究科  
<sup>†</sup>GITI, Waseda University <sup>‡</sup>GITS, Waseda University

**Abstract:** We propose a new coding scheme based on quaternion. The quaternion has been applied to a color space of images in order to find color edges. In this paper, we use quaternions to represent direction and rotation in a three-dimensional vector space, which is composed by coefficients of discrete wavelet transform. First, we set the coefficients to the elements of a quaternion. Second, we substitute these coefficients represented as a quaternion to a two dimensional vector and a rotor quaternion represented by a single argument parameter. Experimental results show that these parameters have good properties for image coding.

## 1 はじめに

四元数は、ハミルトンにより考案された複素数の拡張概念である。コンピュータグラフィックスでは、3次元空間における剛体回転を精度良く表現するために広く用いられている。また、四元数を含む高次元の複素数は、超複素数と呼ばれ、信号処理や画像処理に応用されている [1]。カラー画像のエッジ検出法 [2] や複素ウェーブレット変換の拡張表現 [3] などが提案されている。

本検討では、画像符号化への応用の基礎として、離散ウェーブレット変換で得られるサブバンド係数を四元数で表現する。さらに、3次元空間における移動と回転を表す変数に置換しその特性を解析する。

## 2 四元数

本節では、四元数の定義について述べる。四元数は、式 (1) のように複素数の拡張として表される。

$$H = q_0 + q_1i + q_2j + q_3k \quad (1)$$

ここで、 $q_0$  は四元数の実部を表し、 $(q_1, q_2, q_3)$  は、虚部を表している。四元数は、複素数と同様に、共役四元数  $H^*$  が定められ、式 (2) で表される。

$$H^* = q_0 - q_1i - q_2j - q_3k \quad (2)$$

ここで、 $i, j, k$  には、式 (3) の関係が成立する。また、 $i, j, k$  の積は、式 (4) で表される。これは、四元数が非可換体であることを示している。

$$i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1 \quad (3)$$

$$ij = -ji = k, jk = -kj = i, ki = -ik = j \quad (4)$$

Geometric Algebra [1] では、3つの基底 ( $e_1, e_2, e_3$ ) に対して ( $1, e_1, e_2, e_3, e_{12}, e_{23}, e_{31}, e_{123}$ ) のベクトルで三次元空間を表現する。これらのベクトルのうち、 $(e_{12}, e_{23}, e_{31})$  だけを用いて3次元空間を表すこともできる。これは、実部が

常に0の四元数に対応する。この性質を利用することで、RGB色空間の各色を3次元空間の各軸に対応づけられる [2]。

## 3 サブバンド係数と四元数

離散ウェーブレット変換で得られる各高域サブバンドは、直和の関係にある。そこで、本検討では、前節で述べた ( $e_{23}, e_{31}, e_{12}$ ) で表される3次元空間上の軸に対して、 $(HL, LH, HH)$  の各高域サブバンド係数を対応づける。これにより、任意の高域サブバンド係数は、 $c_{x,y} = HL_{x,y}i + LH_{x,y}j + HH_{x,y}k$  のように3次元空間における四元数として表される。ここで、 $(x, y)$  はサブバンドの座標を表す。

### 3.1 回転演算子

四元数の演算では、三次元空間上の四元数を回転演算子  $R$  とその共役  $R^*$  を左右からかけることで、回転移動を表現する。 $e_{23} + e_{31} + e_{12}$  を回転軸とした回転演算子  $R$  は、式 (5) で表される。式を展開すれば、いずれも四元数であることがわかる。

$$R = \cos\theta + \frac{e_{23} + e_{31} + e_{12}}{\sqrt{3}} \sin\theta \quad (5)$$

### 3.2 サブバンド係数の回転と移動

回転演算子  $R$  は、正規化された四元数の回転を表している。従って、任意の四元数は、単位四元数からの回転と移動により一意に表現できる。そこで、回転を表す変数として  $\theta$ 、回転軸  $\mu = e_{23} + e_{31} + e_{12}$  と平行な成分の大きさを  $\alpha$ 、 $\mu$  と直交する成分の大きさを  $\beta$  とし、任意の元を  $(\alpha, \beta, \theta)$  を用いて表す。図1に三次元空間における四元数  $A, B$  の幾何的な関係性を示す。 $\theta$  は、 $A$  を正規化した四元数から  $B$  を正規化した四元数への回転を表しており、 $B$  は、 $A$  を回転して得られる  $A'$  の  $\mu$  に直交する単位ベクトル  $\mu_{\perp}$  と  $\mu$  に並行する単位ベクトル  $\mu_{\parallel}$  の線形和で表され、

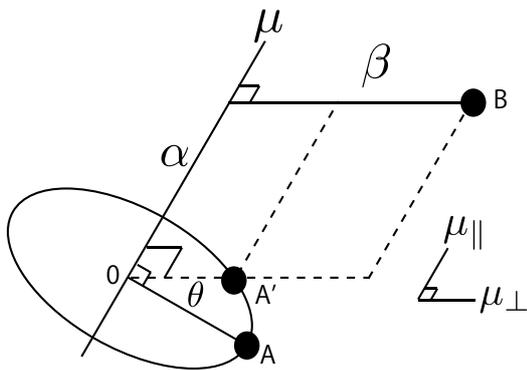


Figure 1: Rotation of a quaternion in 3D space.

各係数を  $\alpha$  と  $\beta$  で表す. この関係を式 (6) に示す.  $\theta$  は, 正規化された  $A$  と  $B$  の内積と外積から一意に求まる.

$$\begin{aligned} B &= \alpha\mu_{\parallel} + \beta\mu_{\perp} \\ &= \alpha\mu_{\parallel} + \beta(R_{\theta}\frac{A}{\sqrt{AA^*}}R_{\theta}^*) \end{aligned} \quad (6)$$

以上のように, 各サブバンド係数の組  $(HL_{m,n}, LH_{m,n}, HH_{m,n})$  は,  $(\alpha, \beta, \theta)$  で一意に表される. ただし,  $\beta \geq 0$  と  $0 \leq \theta \leq 2\pi$  を満たす. これらの3係数を符号化対象として考える.

## 4 実験

前節で定義した四元数を用いたサブバンド係数の置換を, 標準画像 Lena に対して適用した. 置換後の係数  $(\alpha, \beta, \theta)$  を量子化し, 分割レベルごとのヒストグラムを実験により求めた. 回転の基準となる四元数には  $(0, 0, 0, 1)$  を用いた. 図2に, レベル3と4におけるヒストグラムを示す. 横軸はシンボルの値, 縦軸はシンボルの個数を表している. 図より, 変数  $\alpha$  と  $\beta$  は, シンボルの発生が0付近に偏っていることがわかる. 一方,  $\theta$  は, 2つのピークを持ち, その他のシンボルも大きな値を示している. 従って,  $(0, 0, 0, 1)$  を基準とした回転で全ての  $\theta$  を表現する場合, 圧縮に不向きであるといえる.

そこで, 変数  $\theta$  の定性的な特性を調べるために各レベルごとに係数の画像を生成し比較した. 図3に,  $0 \sim \pi$  の値を持つ  $\theta$  を  $0 \sim 255$  に正規化して生成した画像を示す. 図3より,  $\theta$  の値は, 入力画像のエッジ成分を反映した値であり, かつ, レベル間で相関がみられることがわかる.

## 5 おわりに

本検討では, ウェーブレット変換で得られるサブバンド係数を四元数として表した. また, サブバンド係数を回転

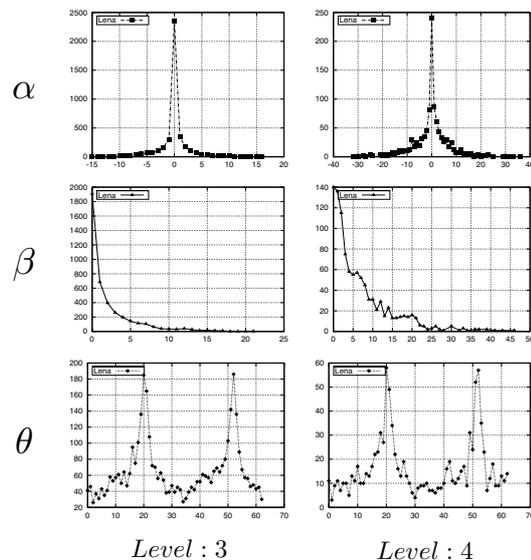


Figure 2: Histogram of quaternion variables.

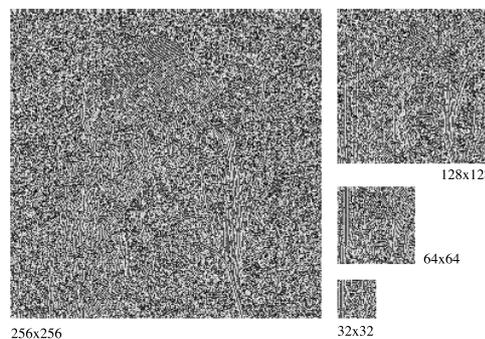


Figure 3: Quaternion angle images.

演算子と並進ベクトルの係数に置き換え, それらを量子化対象とする方式を検討した. 実験により, 移動ベクトルの係数には0を中心とした偏りがあり, 回転角には, 画像のエッジが反映されレベル間の相関を確認した.

## 参考文献

- [1] D. Alfsmann, *et al.*: "Hypercomplex Algebras in Digital signal Processing: Benefits and Drawbacks," Proc. of EUSIPCO 2007, pp.1322–1326, 2007.
- [2] Mishra, B., *et al.*: "Advancement in Color Image Processing using Geometric Algebra," EUSIPCO 2008.
- [3] Wai Lam Chan, *et al.*: "Coherent Multiscale Image Processing Using Dual-Tree Quaternion Wavelets," IEEE Trans. on Image Processing, vol.17, no.7, pp1069–1082, Jul. 2008.

早稲田大学国際情報通信研究センター  
〒 367-0035 埼玉県本庄市西富田 1011  
Phone: 0495-24-6143, Fax: 0495-24-6645  
E-mail: takaxp@fuji.waseda.jp