

疑似 TV ノルムの数値計算とその領域分割への応用に関する検討

河村 圭[†] 石井 大祐[†] 渡辺 裕[†]

[†] 早稲田大学大学院 国際情報通信研究科
〒 367-0035 埼玉県本庄市西富田 1011 A310
E-mail: †kawamura@suou.waseda.jp

あらまし 本稿では Total Variation ノルムによる画像分離問題を対象とする。従来手法では、双対問題としてこれを定式化して、双対変数を縮小写像を用いた反復処理により求めていた。しかし、縮小写像における各項の役割が陽でなく、他の分野への応用が困難であった。そこで、直感的に理解しやすい Total Variation の離散化と、操作としての微分を提案する。さらに最急降下法により骨格画像を直接計算する方法を示す。標準画像を用いて入力画像と骨格画像の波形や、提案手法と従来手法の骨格画像の類似度を比較する。これらの実験により提案手法は各項の役割が陽でありながら、従来手法と同じ性能を維持していることを確認する。また、この特徴を利用して、画像分割の前処理に適用する例を示す。

キーワード Total Variation, 最急降下法, 領域分割, 画像符号化。

A Study on Numerical Computation of Pseudo TV-norm and its Application to Image Segmentation

Kei KAWAMURA[†], Daisuke ISHII[†], and Hiroshi WATANABE[†]

[†] Graduate School of Global Information and Telecommunication Studies, Waseda University,
A310, 1011 Nishi-Tomida, Honjo-shi, Saitama 367-0035, Japan.
E-mail: †kawamura@suou.waseda.jp

Abstract An image decomposition problem using a Total Variation norm is the object of this paper. In a conventional method, this problem was formulated by the dual problems. Dual variables in it are calculated by an iteration of the convex projection method. However, a role of each variable is implicit. Then, it is difficult to apply to another field. We propose a comprehensible discretization of the Total Variation and a differential manipulation as the operation. A direct calculation procedure of the structural image by the steepest descent method is described. Two comparisons of waveforms and similarities are shown. These experiments clarify that the proposed method maintains the performance of the conventional method with the explicit role of each variable. An example of application to the image segmentation is demonstrated.

Key words Total Variation, Steepest Descent Method, Image Segmentation, Image Coding.

1. ま え が き

画像復元問題は、画像処理における大きなテーマである。古典的な方針としては、画像を 2 つの成分 $u + v$ に分解することである。一つ目の成分 u は構造化されていて、幾何形状を単純に記述できる。画像内にある均等色のオブジェクトをモデル化している。二つ目の成分 v はテクスチャとノイズを含む振動成分である。一方、理想的なモデルは画像を 3 つの成分 $u + v + w$ に分離する。 v は入力画像のうちテクスチャを含み、 w はノイズを含む。本稿では $u + v$ モデルを扱う。

このような問題を解く正則化基準として、Rudin, Osher, Fatami らによって Total Variation が導入された (ROF モデル) [1]。Mayer らは、 v がウェーブレットの高周波成分に該当することを主張した [2]。Vesa らは、 L^∞ ノルム (最大値ノルム) を近似することで最小化問題を解くアルゴリズムを提案した [3]。本質的に 0 除算が含まれており、実装上の工夫により回避している。Carter らは、双対変数を導入することで、ノルムの近似や 0 除算を回避している [4]。Aujol, Aubert, Blanc-Féraud, Chambolle らは、Total Variation の収束を保証した高速な最小化アルゴリズムを提案した [5]。

これらの手法は、縮小写像を用いて反復計算により双対変数を計算している。そのため各項の役割が陽でないため、他分野への応用が困難である。また、導入した双対変数の次元数が画像の次元数の2倍になるため、計算コストが高いという問題がある。

本稿では、Total Variation の離散化を改良することで操作としての微分を可能にし、最急降下法を適用する。その結果、各項の役割が陽になる。実験により、まず提案する疑似 TV ノルムが、従来の TV ノルムと同様に振動成分の除去が可能であることを示す。さらに、均等色領域への分割性能を示すことで、提案手法の有効性を示す。

2. TV 最小化の従来手法

2.1 画像復元問題

画像復元問題の目的はエッジが保存されたノイズ除去後の画像 u を得ることである。ここで、与えられる変数は観測画像 g と利用者によって選択された重み λ である。必要なのは正則化関数 $R(u)$ と関数空間 $S(\Omega)$ である。Tikhonov の正則化によると、

$$\min_{u \in S(\Omega)} \frac{\|u - g\|^2}{2\lambda} + R(u) \quad (1)$$

と表せる。

Total Variation (TV) 正則化は、Rudin, Osher, Fatemi によって提案され、

$$R(u) = TV(u) = \int_{\Omega} |\nabla u| dx dy, \quad (2)$$

$$|\nabla u| = \sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2} \quad (3)$$

と定義される [1]。

特徴としては、 u が微分可能である必要が無く、不連続であることが許容される。また、弱い意味で微分が考慮されている。

これを式 1 に代入すると、

$$\min_u \int_{\Omega} \frac{(u - g)^2}{2\lambda} + |\nabla u| dx dy \quad (4)$$

となる [3]。オイラー方程式より、

$$u - g - \lambda \nabla \cdot \left(\frac{\nabla u}{|\nabla u|} \right) = 0 \quad (5)$$

となる。しかし、 $|\nabla u| = 0$ のときに定義できないという問題がある。そこで、常套手段として微少な値 $\beta > 0$ を導入し、

$$u - g - \lambda \nabla \cdot \left(\frac{\nabla u}{\sqrt{|\nabla u|^2 + \beta}} \right) = 0 \quad (6)$$

を解く。もし β が大きいとエッジがぼけてしまい、小さいと微分が計算できないという問題がある。

2.2 双対変数

ここで、 β を含めずに新しい変数を導入し、弱い TV として知られている

$$TV(u) = \max_{|w| \leq 1} \int_{\Omega} -u(\nabla \cdot w) dx dy \quad (7)$$

を用いる [4]。ここで、 w は u の双対変数と見なせる。これを先と同様に式 1 に代入すると、

$$\min_u \int_{\Omega} \frac{(u - g)^2}{2\lambda} - \max_{|w| \leq 1} u(\nabla \cdot w) dx dy \quad (8)$$

$$= \max_{|w| \leq 1} \min_u \int_{\Omega} \frac{(u - g)^2}{2\lambda} - u(\nabla \cdot w) dx dy \quad (9)$$

となる。積分の項を $\Psi(u)$ と置くと、

$$\nabla \Psi(u) = \vec{0} \iff u = g + \lambda(\nabla \cdot w) \quad (10)$$

となる。式 10 を式 9 に代入すると、

$$\max_{|w| \leq 1} \int_{\Omega} g(\nabla \cdot w) + \frac{3\lambda}{2} (\nabla \cdot w)^2 dx dy \quad (11)$$

となる。この結果、目的関数は w の 2 次関数となり、 β も必要ない。また、 $u = g + \lambda(\nabla \cdot w)$ となる。一方で、制約付きの最適化問題となるうえに、1 画素毎に制約が生じてしまう。

2.3 離散化と記号の定義

双対問題に進む前に、必要となる離散化を定義する。話を単純にするため、画像は $N \times N$ の 2 次元行列であるとする。 X はユークリッド空間 $\mathbb{R}^{N \times N}$ 、 Y は $X \times X$ のベクトルを表す。

ここで、 $u, v \in X$ のとき、

$$\langle u, v \rangle_X = \sum_{1 \leq i, j \leq N} u_{i,j} v_{i,j}, \quad (12)$$

$p = (p^1, p^2), q = (q^1, q^2) \in Y$ のとき、

$$\langle p, q \rangle_Y = \sum_{1 \leq i, j \leq N} (p_{i,j}^1 q_{i,j}^1 + p_{i,j}^2 q_{i,j}^2) \quad (13)$$

とする。さらに、 $\|\cdot\|^2$ を $\|x\|^2 = \langle x, x \rangle_X$ で与えられる X におけるユークリッドノルムとし、 $y = (y_1, y_2) \in Y$ について、 $|y| = \sqrt{y_1^2 + y_2^2}$ とする。

離散系の TV を定義するために、線形の離散勾配演算子を導入する。もし、 $u \in X$ なら、勾配 $\nabla u \in Y$ は、

$$(\nabla u)_{i,j} = ((\nabla u)_{i,j}^1, (\nabla u)_{i,j}^2) \quad (14)$$

$$(\nabla u)_{i,j}^1 = \begin{cases} u_{i+1,j} - u_{i,j} & \text{if } i < N, \\ 0 & \text{if } i = N, \end{cases} \quad (15)$$

$$(\nabla u)_{i,j}^2 = \begin{cases} u_{i,j+1} - u_{i,j} & \text{if } j < N, \\ 0 & \text{if } j = N \end{cases} \quad (16)$$

となる。ただし、 $i, j = 1, \dots, N$ とする。

離散発散 $\text{div} : Y \rightarrow X$ を連続系のアナロジーを用いて $\text{div} = -\nabla^*$ として定義する。全ての $p \in Y$ と $u \in X$ について $\langle -\text{div} p, u \rangle_X = \langle p, \nabla u \rangle_Y$ となる。これは div が $p = (p^1, p^2) \in Y$ について、

$$(\text{div} p)_{i,j} = \begin{cases} p_{i,j}^1 - p_{i-1,j}^1 & \text{if } 1 < i < N, \\ p_{i,j}^1 & \text{if } i = 1, \\ -p_{i-1,j}^1 & \text{if } i = N, \end{cases} + \begin{cases} p_{i,j}^2 - p_{i,j-1}^2 & \text{if } 1 < j < N, \\ p_{i,j}^2 & \text{if } j = 1, \\ -p_{i,j-1}^2 & \text{if } j = N \end{cases} \quad (17)$$

となり、容易に確かめられる。

2.4 双対問題

ここで、問題をあらかじめ離散化して考える。 u の TV を

$$J(u) = \sum_{1 \leq i, j \leq N} |(\nabla u)_{i,j}| \quad (18)$$

と定義する [5]。

J が 1 次同次であるから、Legendre–Fenchel 変換を適用した

$$J^*(u) = \sup_v \langle u, v \rangle_X - J(u) \quad (19)$$

は、閉凸集合 K の特性関数となるため、

$$J^*(u) = \chi_K(v) = \begin{cases} 0 & \text{if } v \in K \\ +\infty & \text{if otherwise} \end{cases} \quad (20)$$

となる。ここで、 $J^{**} = J$ であるから、

$$J(u) = \sup_{v \in K} \langle u, v \rangle_X \quad (21)$$

が導かれる。

連続系における K の閉凸集合と同様の特性を、離散系においても見出そうとすると、

$$J(u) = \sup_p \langle p, \nabla u \rangle_Y \quad (22)$$

となる。 \sup は全ての i, j について $|p_{i,j}| \leq 1$ を満たすような $p \in Y$ についてとる。式 22 より離散系における閉凸集合 K は

$$\{\text{div } p : p \in Y, |p_{i,j}| \leq 1, \forall i, j = 1, \dots, N\} \quad (23)$$

で与えられる。

ここで改めて式 1 に取りかかる。 $g \in X$ と $\lambda > 0$ が与えられるとき、

$$\min_{u \in X} \frac{\|u - g\|^2}{2\lambda} + J(u) \quad (24)$$

を解く。オイラー方程式は

$$u - g + \lambda \partial J(u) \ni 0 \quad (25)$$

となる。ここで、 ∂J は J の劣微分で、全ての v について $w \in \partial J(u) \Leftrightarrow J(v) \geq J(u) + \langle w, v - u \rangle_X$ として定義される。オイラー方程式は $(g - u)/\lambda \in \partial J(u)$ と書き直せて、これは $u \in \partial J^*((g - u)/\lambda)$ と同値である。

$$\frac{g}{\lambda} = \frac{g - u}{\lambda} + \frac{1}{\lambda} \partial J^*\left(\frac{g - u}{\lambda}\right) \quad (26)$$

と書けば、 $w = (g - u)/\lambda$ は

$$\frac{\|w - (g/\lambda)\|^2}{2} + \frac{1}{\lambda} J^*(w) \quad (27)$$

の最小化問題を得る。 J^* は式 19 で与えられるから、 $w = \pi_K(g/\lambda)$ と演繹できる。 u の解は

$$u = g - \pi_{\lambda K}(g) \quad (28)$$

と簡潔な表現が得られる。それゆえ、 u を計算するアルゴリズムとして可能なものは非線形写像 $\pi_{\lambda K}$ を計算することである。

次に、2 次元でこの写像を計算する手法を述べる。非線形写像 $\pi_{\lambda K}(g)$ を計算することは、以下の問題を解くことと同じである。

$$\min \{ \|\lambda \text{div } p - g\|^2 : p \in Y, |p_{i,j}|^2 - 1 \leq 0, \forall i, j = i, \dots, N \} \quad (29)$$

この手法の優位性は必ず収束値が存在することであり、その効率と安定性が保証されていることである。一方、

$$\min_{u \in X} \frac{\|Au - g\|^2}{2\lambda} + J(u) \quad (30)$$

と定式化される、拡大などの復元問題に対してどのように適用すればよいのかが陽ではない。ここで、 A は線形演算子である（一般的にローパスフィルタ、つまり画像のぼかしに対応する）。

3. 提案手法

3.1 離散化と計算アルゴリズム

求めたい骨格画像 u の双対変数 w や p を導入し、制約付きの最小化問題を解く手法には以下のような問題がある。まず、直接求められた双対変数の役割と計算途中の推移が陽でないため、他分野への適用が難しい。さらに、双対変数の次元数が画像の 2 倍になっているため、計算コストが高い。

そこで、最急降下法を用いてこの問題を直接解く手法を検討する。今までの議論で明らかのように、 $\nabla u = 0$ のときに微分が未定義になることが課題であった。本稿では TV ノルムの概念に立ち返り、演算子としては微分ではなく、操作としての微分を導入する。

$J(u) = \sum |\nabla u|$ の意図は、通常は微分が定義できない不連続点を含む関数に対して、ある範囲で積分してから微分するということである。 ∇u を離散化する方法には自由度があるが、大局的には隣接画素との差分の絶対値を積算しているだけである。この意図の明瞭性を維持したまま局所的な離散化を 4 画素用いて以下のように定義する。

$$\mathbf{u}_{i,j} = (u_{i,j}, u_{i+1,j}, u_{i,j+1}, u_{i+1,j+1})^t \quad (31)$$

$$|(\nabla \mathbf{u})_{i,j}| = |u_{i+1,j+1} - u_{i+1,j}| + |u_{i,j+1} - u_{i,j}| + |u_{i+1,j+1} - u_{i,j+1}| + |u_{i+1,j} - u_{i,j}| \quad (32)$$

$$= J_{i,j}(\mathbf{u}) \quad (33)$$

これは、4 画素内で隣接画素との差分の絶対値を合計して、

$$|(\nabla u)_{i,j}| = (\max(\mathbf{u}_{i,j}) - \min(\mathbf{u}_{i,j})) \times 2 \quad (34)$$

と変形できる。これを従来の TV ノルムと区別するために、疑似 Total Variation ノルムとよぶ。

式 34 をについて考察を加える。まず、 $|(\nabla \mathbf{u})_{i,j}|$ が 0 になるのは、4 画素が全て同じ値のときである。次に $|(\nabla \mathbf{u})_{i,j}|$ が値を持つ（0 より大きい）場合、これを減少させるためには 4 画素の値を同じにすればよい。そこで、

$$\partial J(u) = \frac{\Delta J_{i,j}(\mathbf{u})}{\Delta \mathbf{u}_{i,j}} = \frac{J_{i,j}(u + \Delta \mathbf{u}_{i,j}) - J_{i,j}(\mathbf{u})}{\Delta \mathbf{u}_{i,j}} \quad (35)$$

を考える。 $\Delta \mathbf{u}_{i,j}$ として、4 画素を平均化するベクトルを採用

すると、離散化の定義より、 $\partial J(u)$ は $\Delta u_{i,j}$ の値によらず一定の値をとる。 $J_{i,j}(u)$ をかならず減少させるベクトルが定義できるので、これを操作としての微分と定義する。

$$\Delta u_{i,j} = \left(\overline{u_{i,j}} - u_{i,j}, \overline{u_{i,j}} - u_{i+1,j}, \right. \\ \left. \overline{u_{i,j}} - u_{i,j+1}, \overline{u_{i,j}} - u_{i+1,j+1} \right)^t \quad (36)$$

ただし、ベクトルの大きさは1で正規化する。また、 $|\nabla u|$ が0のときは依然として微分できないため、実際の計算では場合分けが生じる。

以上の考察より、式24に最急降下法を適用すると、

$$u_{i,j}^{n+1} = u_{i,j}^n - \alpha(u_{i,j}^n - g_{i,j} + \lambda \Delta u_{i,j}) \quad (37)$$

となる。 n は更新回数、 α はステップ幅である。 $J_{i,j}(u)$ が0のときは微分が定義できないため、 $J_{i,j}(u)$ が微小なときを含めて $u_{i,j}^{n+1} = \overline{u_{i,j}^n}$ とする。以下ではこれを提案手法1とよぶ。

3.2 領域分割への応用

ここでは、提案したTVノルムの計算アルゴリズムを拡張して、領域分割に応用する例を示す。TVノルムを用いるとテクスチャなどの変動成分は入力画像から除去されるが、輪郭のようなエッジ成分は保存される。そこで、得られた骨格画像を輝度による領域分割の入力画像として利用することが検討されている。

しかし、TVノルムでは領域分割を十分に考慮しているわけではない。そこで、 $J_{i,j}(u) < \lambda$ を満たす $u_{i,j}$ を $\overline{u_{i,j}^n}$ で置換して、均等色領域をより多く生成するように計算アルゴリズムを変更する。また、エッジ付近の差分を過剰評価しないようにローパスフィルタを用いて

$$\|D_1(u) - D_2(g)\|^2 \quad (38)$$

と差分を定義する。ここで、 D_1 と D_2 は任意のフィルタが利用可能である。さらに、 u と g の要素数が異なっても良いため、入力画像の拡大と骨格画像の取得を同時に実現できる（超解像手法の一種である）。以上をまとめると、

$$u_{i,j}^{n+1} = \begin{cases} \overline{u_{i,j}^n} & \text{if } J_{i,j}(u) < \lambda \\ u_{i,j}^n - \alpha(\overline{u_{i,j}^n} - \overline{g_{i,j}} + \lambda \Delta u_{i,j}) & \text{if otherwise} \end{cases} \quad (39)$$

となる。以下ではこれを提案手法2とよぶ。

4. 実験と考察

4.1 実験条件

提案手法を実装し、自然画像を用いて骨格画像 u の分離実験を行った。従来手法としてROFモデルをChambolleらの手法を用いて計算した[5]。まず、提案手法1が自然画像に対してテクスチャの分離や平滑化において波形を比較することで同等の性能を有していることを確認する。また、PSNRを用いて提案手法と従来手法により得られる骨格画像の近似度を計る。次に、提案手法2による領域分割の性能を、輪郭線に必要な符号量とPSNRにより比較する。

ここで、提案手法で用いるパラメータを λ_p 、従来手法で用い

るそれを λ_c と定義する。また、 λ_c は除去するテクスチャの振幅の半分程度に相当し、従来手法と同一PSNRを実現する λ_p は概ね2倍の大きさであった。ステップ幅 α は $1.0/\lambda_p$ よりやや小さい値を採用した。この値を超えると最急降下法が収束しないことを実験的に確認している。また、反復回数は提案手法では10回、従来手法では30回とした。

4.2 分離性能の比較

標準画像Lennaについて、図1に提案手法により抽出された骨格画像 ($\lambda_p = 32$)、図2に骨格画像と入力画像の差分、図3に従来手法より抽出された骨格画像 ($\lambda_c = 12$)、図4に入力画像（便宜的に128行目に白線を入れてある）を示す。また、Barbara画像について、図5に提案手法により抽出された骨格画像 ($\lambda_p = 32$ 、便宜的に256行目に白線を入れてある）を示す。さらに、図7, 8にLennaの128行目、Barbaraの256行目の x 座標と輝度の関係を示す。これらの結果より、提案手法は従来手法と同様にテクスチャ領域の平滑を実現するとともに、エッジの平滑化を回避していることが確認できる。

表1, 2にLennaとBarbaraについて提案手法と従来手法による骨格画像の近似度をPSNRとして左列に示す。ただし、入力画像と得られた骨格画像のPSNRが近くなるような λ の値を中央列、右列のように組み合わせている。定量的な評価により両方の骨格画像は非常に近いことが明らかとなった。以上のことより、提案手法は従来手法と同等の性能を有していると推定できる。

4.3 領域分割への適用結果

領域分割へ適用するために拡張した提案手法2の実験結果について述べる。まず、図6にBarbaraの骨格画像 ($\lambda_p = 32$) を示す。提案手法1（図5）と比較して同じ λ_p であっても、提案手法2の方が平滑化能力が高いことが確認できる。

次に、得られた骨格画像を同じ輝度の画素が連結した均等色領域に分割し、その輪郭線を符号化した場合のビットレートを計測した。LennaとBarbaraについて λ の値を4~32で変化させて取得したビットレートとPSNRの関係を図9, 10に示す。ただし、今回は領域併合などの一般的な領域分割を適用する前段階で評価しているため、1領域辺り平均で2~3画素程度であり、符号量はかなり多くなっている。

提案手法2は少ない輪郭符号量で従来手法よりも高いPSNRを実現できることが確認できる。従って、入力画像からの劣化が少ない均等色化を実現できていると言える。また、提案手法によって陽になった各項の役割は、容易に変更できることが示された。今後は、Segmented Image Coding (SIC) [6] の性能向上へと結びつけていくために、既存の領域分割手法と組み合わせ、前処理としての性能比較を実施する。

5. むすび

本稿では、TVノルムによる画像分離問題を対象として、TVノルムの離散化と操作としての微分を提案した。さらにこれを用いて骨格画像 u を計算するアルゴリズムを示した。実験により波形と類似度の比較を行い、従来手法と同等の性能を維持したまま、計算アルゴリズムでの各項の役割を陽にした。



図 1 提案手法による骨格画像 ($\lambda_p = 32$)
Fig.1 Structural image by the proposed method.



図 2 提案手法による振動画像 (差分画像)
Fig.2 Oscillating (residual) image by the proposed method.



図 3 従来手法による骨格画像 ($\lambda_c = 12$)
Fig.3 Structural image by the conventional method.



図 4 入力画像 Lenna と 128 行目 (白線)
Fig.4 Input image Lenna with a white line at 128 rows.



図 5 提案手法 1 による骨格画像 ($\lambda_p = 32$)
Fig.5 Structural image by the proposed method one.



図 6 提案手法 2 による骨格画像 ($\lambda_p = 32$)
Fig.6 Structural image by the proposed method two.

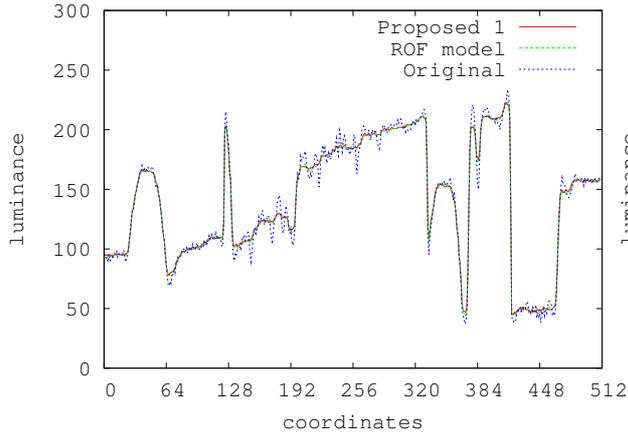


図 7 画像 Lenna 128 行目の波形

Fig. 7 Waveform of Lenna at 128 rows.

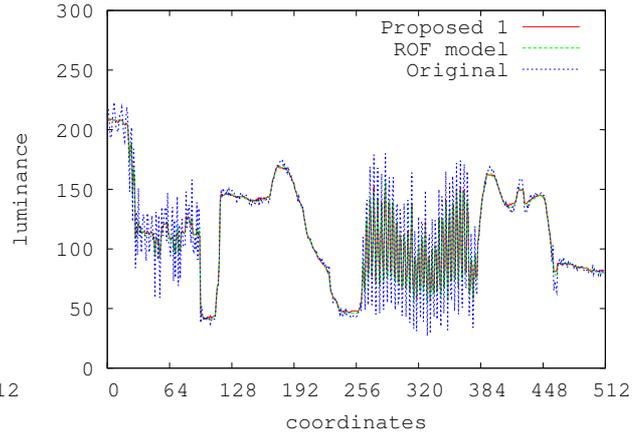


図 8 画像 Barbara 256 行目の波形

Fig. 8 Waveform of Barbara at 256 rows.

表 1 画像 Lenna における画像近似度 (PSNR) [dB]

Table 1 Image Similarity (PSNR) on Lenna. [dB]

Cross	λ_p	Proposed	λ_c	Conventional
47.6	4	41.4	2	41.5
47.3	8	38.2	4	38.4
46.9	16	35.3	8	35.5
46.5	24	34.0	12	33.8
45.8	48	32.5	16	32.6

表 2 画像 Barbara における画像近似度 (PSNR) [dB]

Table 2 Image Similarity (PSNR) on Barbara. [dB]

Cross	λ_p	Proposed	λ_c	Conventional
47.6	4	39.9	2	40.1
46.4	8	35.1	4	35.4
45.2	16	30.8	8	30.7
43.5	24	28.8	12	28.1
44.1	48	26.8	16	26.7

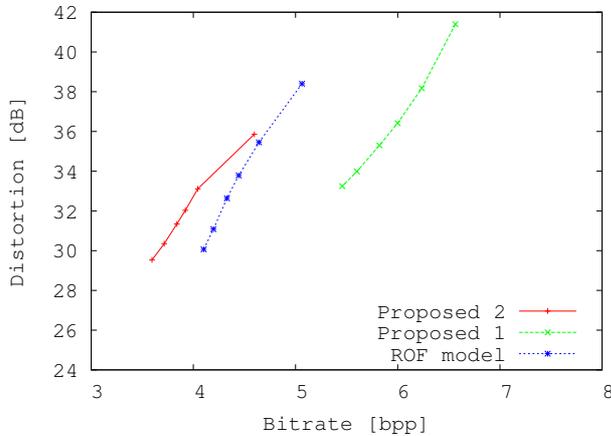


図 9 画像 Lenna の領域分割後の輪郭情報と品質の関係

Fig. 9 Relation of border data and image quality on segmented image Lenna.

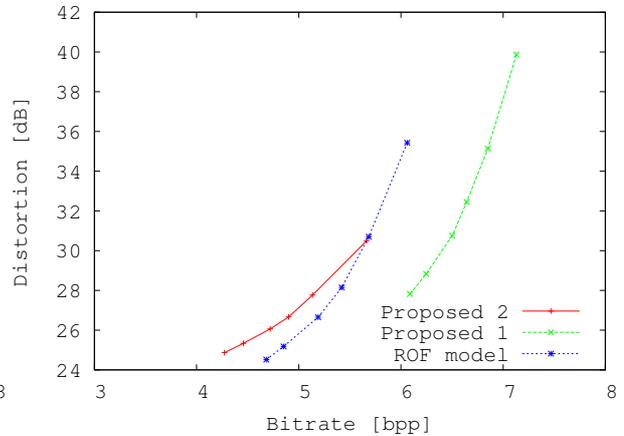


図 10 画像 Barbara の領域分割後の輪郭情報と品質の関係

Fig. 10 Relation of border data and image quality on segmented image Barbara.

謝 辞

本研究は特別研究員奨励費 (19・2363) の助成を受けたものである。

文 献

- [1] Leonid I. Rudin, Stanley J. Osher, and Emad Fatemi, "Nonlinear total variation based noise removal algorithms," *Physica D*, Vol. 60, pp. 259–268, 1992.
- [2] Yves Meyer, "Oscillating Patterns in Image Processing and Nonlinear Evolution Equations: The Fifteenth Dean Jacqueline B. Lewis Memorial Lectures," *American Mathematical Society*, 2001.
- [3] Luminita A. Vese and Stanley J. Osher, "Modeling Textures with Total Variation Minimization and Oscillating Patterns in Image Processing," *Journal of Scientific Computing*, Vol. 15, pp. 553–572, 2003.
- [4] Jamylle L. Carter, "Dual Methods for Total Variation-based Image Restoration," Ph.D. thesis, U.C.L.A. (Advisor: T.F. Chan), 2001.
- [5] Antonin Chambolle, "An Algorithm for Total Variation Minimization and Applications," *Journal of Mathematical Imaging and Vision*, Vol. 20, pp.89–97, 2004.
- [6] C.A. Christopoulos, "Segmented image coding: Techniques and experimental results," *Signal Processing: Image Communication* 11, pp.63–80, 1997.