

# 双対木複素ウェーブレットにおける疎表現の検討

高橋 良知<sup>†</sup> 渡辺 裕<sup>†</sup>

<sup>†</sup> 早稲田大学大学院 国際情報通信研究科

〒 367-0035 埼玉県本庄市西富田 1011

E-mail: †yoshitomo.taka@toki.waseda.jp

あらまし 双対木複素ウェーブレット変換は、多次元信号において精度の良い方向選択性を持ち、シフト不変性が成り立つ。また、その2次元変換は変換係数の個数が4倍に増加する冗長変換である。冗長変換では少数の基底で対象物を表現する疎表現を求めることができる。本稿では、以下の2つを考察する。1つは、複素ウェーブレットにおいて疎表現を求める Noise Shaping と呼ばれる手法が L0 ノルムベースの疎表現近似手法と等価であることを示し、Noise Shaping の疎表現の近似性能を考察する。もう1つは、Noise Shaping の反復処理を制御するパラメータと求める疎表現の関係を Energy Compaction と相互情報量を用いて考察する。等価性より、従来とは異なる係数選択手法を提案し、提案手法において高い Energy Compaction を得られることを確認する。

キーワード 複素ウェーブレット, Noise Shaping, 疎表現, 交互射影, エネルギー集中性, 相互情報量

## A Study on Sparse Representation of Dual-Tree Complex Wavelet

Yoshitomo TAKAHASHI<sup>†</sup> and Hiroshi WATANABE<sup>†</sup>

<sup>†</sup> Graduate School of Global Information and Telecommunication Studies, Waseda University

1011 Nishi-Tomida Honjyo-shi Saitama 367-0035 Japan

E-mail: †yoshitomo.taka@toki.waseda.jp

**Abstract** The Dual-Tree Complex Wavelet Transform (DT-CWT) has good directional selectivity in multiple dimensions and its subband responses are approximately shift invariance. For two dimensional signals, this transform is an overcomplete transform with 4:1 redundancy. In overcomplete transforms, we can find sparse representation which is the one that uses as few basis as possible to represent an object. In this paper, we describe the following two facts. First, it is described that Noise Shaping method on DT-CWT to find sparse representation is equivalent to the approximate method of sparse representation based on L0 norm. Second, A relation between parameters of Noise Shaping and sparse representations by energy compaction and mutual information is clarified. Then, an improved selection of coefficients in Noise Shaping is proposed. Good Energy Compaction on proposed method is validated.

**Key words** Complex Wavelet, Noise Shaping, Sparse Representation, Alternating Projection, Energy Compaction, Mutual Information.

### 1. はじめに

JPEG 2000 などの画像符号化で用いるウェーブレットは最大間引きフィルタバンクで構成されることが一般的である。このフィルタバンクを用いた離散ウェーブレット変換 (DWT : Discrete Wavelet Transform) は、画像処理に不適切な2つの特性が知られている。1つはシフト不変性の欠如である。これは入力信号の微小シフトが各レベルの DWT 係数のエネルギーを大きく変えてしまう現象である。もう1つは、2次元画像において、対角方向の画像エッジを同一のサブバンド内に含んでしまう現象である。このため +45°と -45°の2方向を中心

とした画像エッジを分離して扱うことができず、画像符号化において量子化操作などによりチェッカーボードアーティファクトが発生し、主観品質が低下する。

これらの欠点を改善するウェーブレットとして、双対木構造を用いた複素ウェーブレット変換 (DT-CWT : Dual-Tree Complex Wavelet Transform) が提案されている [1]。DT-CWT はシフト不変性が近似的に成立し、±15°, ±45°, ±75°の6方向を中心とした画像エッジを異なるサブバンドへ分離することができる [2]。また DT-CWT は冗長な変換であり、2次元変換では入力画像の4倍の変換係数が発生する。DWT のような非冗長な変換は対象物をただ1通りの基底の線形結合で表現

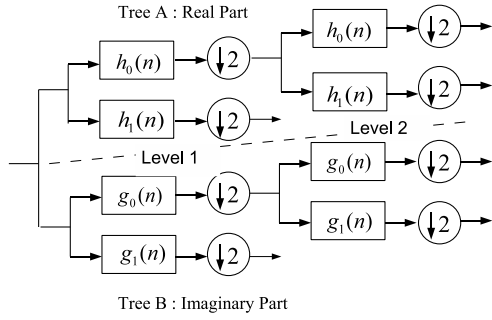


図 1 Analysis FB for 1D DT-CWT

するが、DT-CWT のような冗長な変換では対象物を表現する線形結合の組み合わせが無数に存在する．この中からできるだけ少数の基底で対象物を表現する疎表現を求め、これを画像処理に適用する研究がなされている．また近年、冗長基底を用いた画像符号化方式も提案され、特に低ビットレートにおける有効性が示されている [3]．

Kingsbury らは、複素ウェーブレットにおいて疎表現を求める Noise Shaping と呼ばれる手法を提案している [4]．しかし、この手法は一般的な疎表現近似手法 [5]、[6] と異なるアプローチであり、これらの手法との関係性の考察が不十分である．また、Noise Shaping は反復処理であり、反復条件に基づき求める疎表現の特性が変化すがこのような考察はされていない．

そこで、本稿では、Noise Shaping が Maceran の提案する L0 ノルムベースの疎表現近似手法 [7] と等価であることを示し、一般的な疎表現近似手法の観点から考察する．さらに、この等価性に基づき、Noise Shaping において従来とは異なる係数選択手法を提案し、提案手法において高い Energy Compaction が得られることを示す．また、Noise Shaping の反復処理を 2 つをパラメータで定義し、これらのパラメータと疎表現の特性を Energy Compaction と相互情報量を用いて関連付ける．

以下、2 章では複素ウェーブレットについて述べる．3 章では Noise Shaping について述べ、反復処理を制御するパラメータを定義する．4 章では一般的な疎表現近似手法と Mancera らが提案した L0 ノルムベースの疎表現近似手法について述べる．5 章では Noise Shaping と Mancera らの手法が等価であることを示し、その等価性に基づく新たな係数選択手法を提案する．6 章では提案手法において高い Energy Compaction が得られることを確認し、3 章で定義したパラメータと求まる疎表現との関係を Energy Compaction と相互情報量を用いて評価する．7 章は本稿のまとめである．

## 2. 双対木複素ウェーブレット

### 2.1 複素ウェーブレット

DWT の問題点は実数型の振動関数を用いることに起因し、複素数の正弦波を用いるフーリエ変換では生じない．すなわち、フーリエ変換の絶対値はシフト不変であり、多次元信号において単一方向の周波数成分を分離することができる．これはフーリエ変換で用いる式 (1) の関数の実部と虚部が、 $90^\circ$  の位相ずれをもつヒルベルト変換対を構成しているためである．

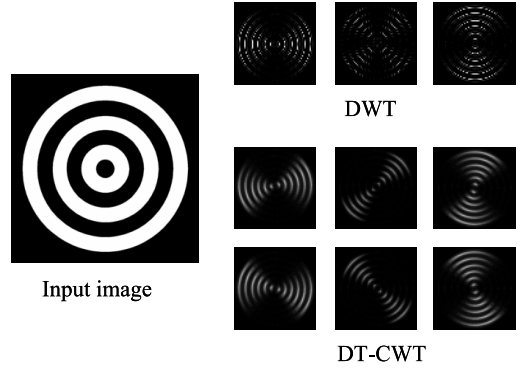


図 2 Directional selectivity of DWT and DT-CWT

$$e^{j\Omega t} = \cos(\Omega t) + j \sin(\Omega t) \quad (1)$$

この関係をウェーブレットを用いて実現したものが複素ウェーブレットである．複素ウェーブレット  $\psi^c(t)$  は、2 つの実数型ウェーブレット  $\psi^h(t)$ 、 $\psi^g(t)$  を用いて式 (2) により構成される．

$$\psi^c(t) = \psi^h(t) + j\psi^g(t) \quad (2)$$

ここで、2 つの実数型ウェーブレット  $\psi^h(t)$ 、 $\psi^g(t)$  は近似的にヒルベルト変換対  $\psi^h(t) \approx \mathcal{H}\{\psi^g(t)\}$  を構成し、 $\psi^c(t)$  を用いた複素ウェーブレット変換はフーリエ変換と同様の特性をもつ．

### 2.2 双対木複素ウェーブレット

1 次元双対木複素ウェーブレット変換 (1D DT-CWT) は、図 1 のようにそれぞれの Tree において、実係数の最大間引きフィルタバンクを用いた DWT を実行し、その結果を複素数の実部、虚部に配置したものである．図 1 において、 $h_0(n)$ 、 $h_1(n)$  は実部のローパス、ハイパスフィルタ、 $g_0(n)$ 、 $g_1(n)$  は虚部のローパス、ハイパスフィルタである．ここで、フィルタバンク  $\{h_0(n)$ 、 $h_1(n)\}$  と  $\{g_0(n)$ 、 $g_1(n)\}$  はそれぞれ完全再構成を実現し、かつ、ヒルベルト変換対  $\psi^h(t) \approx \mathcal{H}\{\psi^g(t)\}$  が成立するために  $\{h_0(n)$ 、 $g_0(n)\}$  は  $h_0(n) \approx g_0(n - 0.5)$  が成り立つ必要がある [2]．

1D DT-CWT は、信号  $f(x) = L^2(R)$  を 1 つの複素マザーウェーブレット  $\psi^c$  と 1 つの複素スケーリング関数  $\phi^c$  により表現する．

$$f(x) = \sum_{l \in \mathbb{Z}} s_{j_0, l} \phi_{j_0, l}^c(x) + \sum_{j \geq j_0} \sum_{l \in \mathbb{Z}} c_{j, l} \psi_{j, l}^c(x) \quad (3)$$

ここで、 $j$  は分解レベル、 $l$  はシフト量、 $s_{j_0, l}$  はスケーリング係数、 $c_{j, l}$  は複素ウェーブレット係数である．

### 2.3 2D DT-CWT

2D DT-CWT は DWT と同様に分離型フィルタを用いる．このとき、 $\psi^c$ 、 $\phi^c$  とその複素共役  $\bar{\psi}^c$ 、 $\bar{\phi}^c$  の縦方向、横方向の組み合わせにより周波数上において 6 方向の帯域を分離することができる．つまり、式 (4) のように信号  $f(x, y) \in L^2(R^2)$  を 1 つの複素スケーリング関数と 6 つの複素ウェーブレット関数により表現する．

$$f(x, y) = \sum_{l \in \mathbb{Z}^2} s_{j_0, l} \phi_{j_0, l}^c(x, y) + \sum_{b \in \delta} \sum_{j \geq j_0} \sum_{l \in \mathbb{Z}^2} c_{j, l}^b \psi_{j, l}^b(x, y) \quad (4)$$

ここで、 $b$  はサブバンドの方向をあらわし、 $\delta = \{+15^\circ, +45^\circ, +75^\circ, -15^\circ, -45^\circ, -75^\circ\}$  である。この帯域分離の様子を図 2 に示す。これは円形の入力画像に対するレベル 2 の各サブバンドを示している。DWT は 3 方向のエッジに分離し、そのうち対角方向のエッジは混在しているが、DT-CWT は 6 方向のエッジに分離できる。

### 3. Noise Shaping

#### 3.1 DT-CWT における Noise Shaping

非最大間引きフィルタバンクは最大間引きフィルタバンクに比べ、サブバンド上で付加された雑音が再構成信号に与える影響を小さくする特性がある。この特性を利用して、反復処理により雑音を変形し、再構成信号へ与える雑音の影響をさらに小さくする手法が Noise Shaping である [8]。

Kingsbury らはこの手法を DT-CWT へ適用し疎表現を見つける手法を提案している [4]。図 3 にその構成図を示す。 $x$  は  $N$  次元ベクトルの入力信号、 $A$  は  $M \times N$  の分解行列 ( $M > N$ )、 $y$  は  $M$  次元の DT-CWT 係数であり、 $y = Ax$  が成立する。また  $R$  は  $N \times M$  の再構成行列であり、 $x = Ry$  が成立する。関数  $f(y_i, \theta_i)$  は式 (5) のような閾値  $\theta$  を用いた非線形処理を行う。

$$\hat{y}_{2l-1} + j\hat{y}_{2l} = \begin{cases} 0 & \text{if } |y_{2l-1} + jy_{2l}| < \theta \\ y_{2l-1} + jy_{2l} & \text{otherwise} \end{cases} \quad (5)$$

2D DT-CWT では  $M = 4N$  であり、再構成処理は  $4N$  の係数空間から  $N$  の画像空間への射影となる。よって  $4N$  の係数空間は、 $N$  次元の値域  $S$  とこれに直交する  $3N$  次元の零空間  $\perp$  から構成される。値域に属するウェーブレット係数を  $y^S$  とすると  $x = Ry^S$  が成立し、零空間に属するウェーブレット係数を  $y^\perp$  とすると  $Ry^\perp = 0$  が成立する。つまり、 $y^S$  は再構成画像へ影響を与える係数、 $y^\perp$  は影響を与えない係数である。 $4N$  の係数空間はこれらの部分空間より式 (6) により構成される。

$$y = y^S + y^\perp \quad (6)$$

ここで、式 (5) による閾値処理を係数  $y$  に対する雑音  $d$  の付加としてモデル化すると、雑音  $d$  も値域と零空間から  $d = d^S + d^\perp$  により構成される。

Noise Shaping は反復処理を用いて、この雑音  $d$  が再構成画像へ与える影響を小さくしてゆく。まず、 $i$  回目の閾値処理後の係数  $\hat{y}_i$  は  $\hat{y}_i = y_i + d_i = y_i + d_i^S + d_i^\perp$  となり、この係数  $\hat{y}_i$  からの再構成画像  $\hat{x}$  と入力画像  $x$  の再構成エラー  $e_i$  の分解処理により得られる更新信号  $w_i$  は式 (7) となる。

$$w_i = kAe_i = kA(x - R\hat{y}_i) = kA(x - Ry_i - Rd_i^S) \quad (7)$$

ここで、 $Rd_i^\perp = 0$  を用いている。以上より、新たな DT-CWT 係数  $y_{i+1}$  は式 (8) により与えられる。

$$y_{i+1} = \hat{y}_i + w_i = y_i + d_i^S + d_i^\perp + k(y_0 - ARy_i - d_i^S) \quad (8)$$

$y_0$  は初期の DT-CWT 係数である。式 (8) において、 $ARy_i = y_0$  より  $k = 1$  の場合、

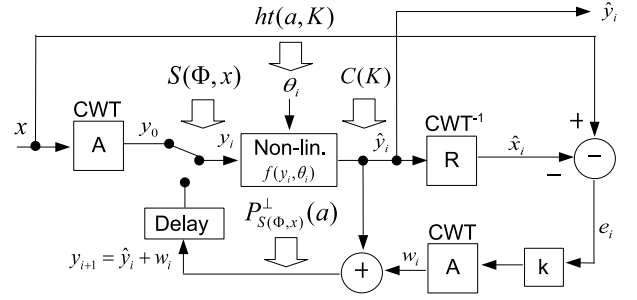


図 3 Structure of Noise Shaping on DT-CWT

$$y_{i+1} = y_i + d_i^\perp \quad (9)$$

となり新たに生成される DT-CWT 係数  $y_{i+1}$  は、 $y_i$  の零空間  $y_i^\perp$  を雑音の零空間  $d_i^\perp$  の加算により変形することで生成される。このとき、 $Ry_{i+1} = x$  より再構成信号は不変である。つまり、Noise Shaping は零空間に属する係数  $y^\perp$  を変形する処理である。

反復処理の過程で閾値処理により生じた零空間に属する誤差  $d^\perp$  は次第に小さくなり  $d^\perp \rightarrow 0$  へと近づき収束する。また、それに伴い再構成エラー  $e_i$  も  $e_i \rightarrow 0$  へと近づく。反復処理の終了時、係数列  $y$  に対する閾値処理により生じる誤差  $d$  の大部分は値域  $d^S$  に属する。

Noise Shaping は少数の絶対値の大きいウェーブレット係数に多くのエネルギーを閉じ込める効果があり、これらの少数の係数から再構成した信号は、処理前よりも高い Energy Compaction を与える。つまり、結果的に Noise Shaping は疎表現を近似的に求める処理に相当する。しかし、この手法で求めた疎表現の近似性能については考察がなされていない。

#### 3.2 パラメータの定義

Noise Shaping における反復処理は 2 つのパラメータで定義できる。式 (5) の閾値処理は絶対値の大きな複素係数を有限個数だけ選択する操作に相当する。このとき反復処理が進むにつれ、選択個数を徐々に増加させることで反復終了時に高い Energy Compaction を得ることができる [4]。ここで 1 回の反復ごとに何個の非ゼロ係数を増加するか (Gain) は、反復終了時の非ゼロ係数の総数 (NonZero) と反復回数合計 (Iteration) の 2 つのパラメータを用いて式 (10) により定義できる。

$$Gain = \frac{NonZero}{Iteration} \quad (10)$$

6 章において、これら 2 つのパラメータと求まる疎表現の関係について考察する。

## 4. 疎表現

#### 4.1 問題設定と近似手法

$N \times M$  行列 ( $N < M$ )  $\Phi$  について、次の線形方程式を考える。

$$\Phi a = x \quad (11)$$

ここで、 $x \in R^N$  は定数、 $a \in R^M$  はこの方程式の解であり無数に存在するが、しばしば、 $\Psi = \Phi^T[\Phi\Phi^T]^{-1}$  を用いて  $a$  の

L2 ノルムを最小とする解  $a_{LS} = \Psi x$  が求められる．これに対し，疎表現は無数に存在する解の中から非ゼロ係数の個数が最少となる解を求める．つまり，疎表現は式 (12) を解くことにより与えられる．

$$\hat{a}_{0H} = \arg \min_a \|a\|_0 \quad s.t. \quad \Phi a = x \quad (12)$$

ここで， $\|a\|_0$  は  $a$  の L0 ノルムであり非ゼロ係数の個数をあらわす．実用上はある程度の誤差を許容する条件下で疎表現を求める式 (13) を解くことが一般的である．

$$\hat{a}_{0S} = \arg \min_a \{\|a\|_0 + \lambda \|\Phi a - x\|_2^2\} \quad (13)$$

ここで  $\lambda$  はラグランジュ乗数である．ただし，これらの問題は NP 困難であり計算を行うことが非常に複雑である．そこで，これらの問題を近似的に解く手法が提案されており，Matching Pursuit (MP) [5] と Basis Pursuit (BP) または Basis Pursuit De-Noiseing (BPDN) [6] が良く知られている．MP は逐次的に対象物を最もよく表現する基底を選び出す手法であり，BP (または BPDN) は L0 ノルムを L1 ノルムへ置き換え線形計画法を用いて疎表現を求める手法である．一方で，Mancera らは，L0 ノルムを直接用いて疎表現を求める手法を提案している [7] ．

#### 4.2 L0 ノルムベースの疎表現近似

Mancera らは， $\lambda$  を用いて式 (13) を解くことが定数  $K$  を用いて  $\|\hat{a}_{0S}\|_0 = K$  という条件下で式 (13) を解くことと等価であることを利用し，式 (14) のように問題を設定している．

$$\hat{a}(K) = \arg \min_{a \in C(K)} \|\Phi a - x\|_2 \quad s.t. \quad C(K) = \{a \in R^M : \|a\|_0 = K\} \quad (14)$$

これは  $x$  とのユークリッド距離を最小化する  $K$  個の非ゼロ係数を持つ  $a$  を探していると解釈することができる． $\hat{a}(K)$  を求めるため，式 (11) の解のアフィン集合  $S(\Phi, x)$  と  $C(K)$  の間の交互直交射影を繰り返す [10] ． $C(K)$  から  $S(\Phi, x)$  への直交射影は  $P_{S(\Phi, x)}^\perp a = a + a_{LS} - \Psi \Phi a$ ， $S(\Phi, x)$  から  $C(K)$  への直交射影は  $ht(a, K)$  により与えられる．ここで， $ht(a, K)$  は  $C(K)$  へのユークリッド距離を最小にする射影であり，最も大きい値から  $K$  個の係数を選択する操作に相当する． $K = 1$  における反復処理の幾何的な遷移を図 4 に示す．Mancera らは，この手法を Curvelet に適用し BP (または BPDN) よりも高い Energy Compaction が得られることを示している．

### 5. 提案手法

#### 5.1 Noise Shaping の疎表現解釈

3 章で述べた Noise Shaping と 4.2 節で述べた L0 ノルムベースの疎表現近似手法は Noise Shaping のパラメータ  $k = 1$  の場合等価である．まず，式 (5) における閾値処理は  $ht(a, K)$  に相当し，最大値から  $K$  個の非ゼロ係数を選択していると考えることができる．また， $P_{S(\Phi, x)}^\perp$  は式 (15) のように変形することができる．

$$\begin{aligned} P_{S(\Phi, x)}^\perp &= a + a_{LS} - \Psi \Phi a \\ &= a + \Psi(x - \Phi a) \end{aligned} \quad (15)$$

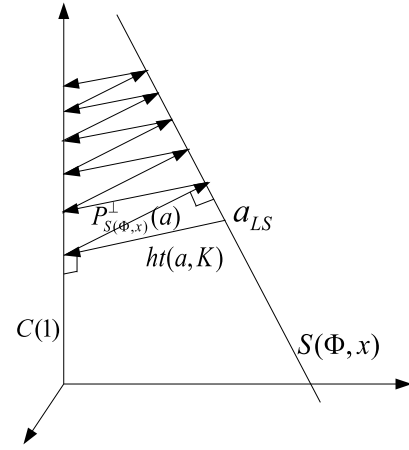


図 4 L0-norm minimization through alternate projections

これは Noise Shaping において，更新信号  $w_i$  を  $\hat{y}_i$  に加算する操作に相当する．これらの対応関係を図 3 に示す．この等価性より，疎表現を求めることは少なくとも零空間の係数を変形し，有限個の非ゼロ係数から再構成した信号の誤差が値域から発生するような状態を作り出すことであると考えられる．

Mancera らの提案手法は  $K$  が固定であるが，Noise Shaping との等価性より  $K$  を反復処理とともに増加させることで，彼らの手法は改善されることがわかる．これは Matching Pursuit のように，近似精度の高い基底から順に選択することで近似精度の悪い基底が選択されにくくなるためである．ただし，Noise Shaping は一度選択した基底は終了時まで保持されるという特性があるため，Huggings らが提案しているような不適切になった基底を除去する操作を加えることで，より理想的な疎表現に近づく可能性がある．

L0 ノルムベースの疎表現近似手法との等価性より，複素ウェーブレットにおける Noise Shaping を用いた疎表現は Curvelet の場合と同様に Basis Pursuit (または BPDN) よりも理想的な疎表現に近いものを与えている可能性がある．しかし，近似手法の性能は用いる基底によって変わるため，Basis Pursuit (または BPDN) との厳密な比較は複素ウェーブレットの行列  $\Phi$  の Mutual Coherence [9] などを考慮する必要があり今後の課題である．

#### 5.2 提案手法

3 章の Noise Shaping を用いた複素ウェーブレットの疎表現では，式 (5) の閾値処理において複素係数単位で最大値より係数を選択する．しかし，L0 ノルムベースの  $ht(a, K)$  は最大値より  $K$  個の非ゼロ係数を選択する操作であり，必ずしも複素係数単位で係数を選択する必要はない．そこで，複素数単位で選択するという制約を排除し，式 (16) のように実部・虚部からそれぞれ独立に係数を選択する手法を提案する．

$$\hat{y}_{2l-1} + j\hat{y}_{2l} = \begin{cases} y_{2l-1} + jy_{2l} & \text{if } |y_{2l-1}| > \theta \text{ and } |y_{2l}| > \theta \\ y_{2l-1} & \text{if } |y_{2l-1}| > \theta \\ jy_{2l} & \text{if } |y_{2l}| > \theta \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad (16)$$



図 5 Reconstructed Image

この手法は次章の実験結果で示すように高い Energy Compaction が得られる．これは、式 (5) によって選択される複素係数の実部と虚部の両基底が必ずしも近似精度の良い基底であるとは限らないからである．これに対し、式 (16) は実部と虚部の基底を独立に考えることで、近似精度の良い基底のみが選択される．しかし、式 (16) により選ばれた係数は複素係数ではなくなり、シフト不変性の特性は失われる．また、従来手法と提案手法の係数選択方法は統合することが可能である．たとえば、エッジ近辺の係数はシフト不変性の成立する複素数として式 (5) を用いて選択し、それ以外の領域の係数は実部、虚部として式 (16) を用いて選択することができる．このときの Energy Compaction は両手法の間に位置すると予想される．

## 6. 実験結果と考察

本実験では、DT-CWT としてレベル 1 において (13,19)-tap odd filter と (12,16)-tap even filter、レベル 2 以降において 18-tap Q-shift filter を使用し [1]、DWT として Daubechies-9/7 filter を使用する．また、レベル 5 まで分解処理を行い、実験画像として Lena (256×256: グレースケース) を用いる．

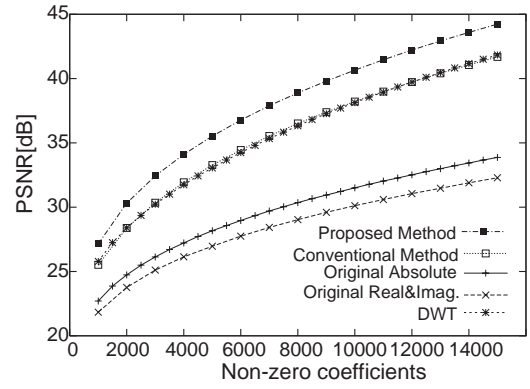
### 6.1 係数選択方法と Energy Compaction

Noise Shaping において、複素数として係数を選択する場合 (conventional) と実部、虚部から独立に係数を選択する場合 (proposed) の Energy Compaction を図 6(a) に示す．ここでの疎表現は PSNR (Peak Signal to Noise Ratio) が最も高くなる  $k = 1.6$  とし、各反復において 1 個ずつ非ゼロ係数を選択 ( $Gain = 1$ ) することで求めている．PSNR は反復処理の終了個数 ( $NonZero$ ) と同数の非ゼロ係数から再構成した画像を用いて計算した．この場合、本手法において最も良い疎表現が求められるが、膨大な計算処理時間を要する．

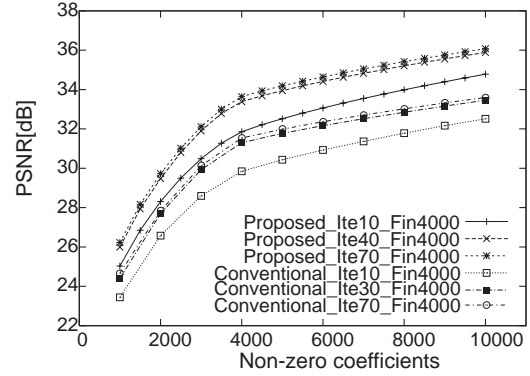
図 6(a) より、従来手法の Energy Compaction は DWT とほぼ同じであるのに対し、提案手法の Energy Compaction はこれより約 1.5 ~ 2.5[dB] 高いことがわかる．また、4000 個の非ゼロ係数を用いて再構成した画像の一部を図 6 に示す．従来手法と DWT の PSNR はほぼ同じであるが複素ウェーブレットを用いる方がエッジ近辺の再構成精度が良く主観的に高い品質である．

### 6.2 パラメータと Energy Compaction

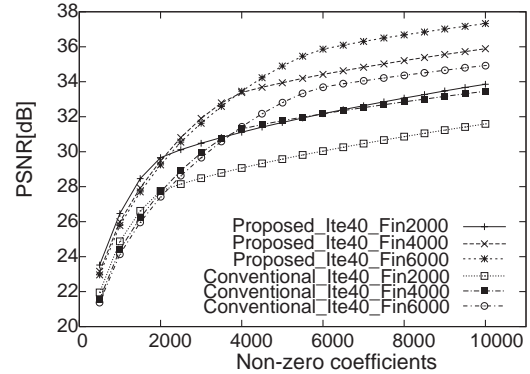
本節では、3.2 節の各パラメータと求まる疎表現の Energy Compaction の違いについて述べる．まず、終了個数を固定 ( $NonZero = Const.$ ) し反復回数を変化させて求めた疎表現の Energy Compaction を図 6(b) に示す．反復回数を増加させることは、式 (10) より 1 回の反復における非ゼロ係数の増加個



(a) Energy Compaction of Noise Shaping



(b) Energy Compaction by number of Iteration



(c) Energy Compaction by number of NonZero

図 6 Energy Compaction of Spare Representaion

数を少なくすることに相当し、不適切な基底を選ぶ可能性が低減されるため高い Energy Compaction を得ることができる．

次に、反復回数を固定 ( $Iteration = Const.$ ) し終了個数を変化させて求めた疎表現の Energy Compaction を図 6(c) に示す．この場合、終了個数を境にして非ゼロ係数の個数に対する PSNR 向上率が異なることがわかる．これは終了個数に達するまでの非ゼロ係数で疎表現を求めるため、それ以降の係数において対象物を疎に表現できていないためである．

### 6.3 パラメータと相互情報量

本節では、3.2 節の各パラメータと求まる疎表現の相互情報量の違いについて述べる．相互情報量は 2 変数間の依存関係を与える基準として利用され、ウェーブレット係数に適用することが可能である．ここで、対象とするウェーブレット係数を  $X$ 、parent (同空間位置の 1 レベル低域の係数) を  $PX$ 、neighbors

表 1 Mutal Information of DT-CWT (number of Iteration)

Iteration	original			10			40			70		
	I(X;PX)	I(X;CX)	I(X;NX)	I(X;PX)	I(X;CX)	I(X;NX)	I(X;PX)	I(X;CX)	I(X;NX)	I(X;PX)	I(X;CX)	I(X;NX)
Conventional	0.44	0.52	0.88	0.40	0.46	0.83	0.35	0.46	0.80	0.31	0.46	0.79
Proposed	0.09	0.09	0.21	0.08	0.09	0.17	0.07	0.09	0.16	0.07	0.09	0.15

表 2 Mutal Information of DWT

Mutal Info.	I(X;PX)	I(X;CX)	I(X;NX)
horizontal	0.12	0.11	0.25
diagonal	0.09	0.09	0.18
vertical	0.19	0.14	0.38

表 3 Mutal Information of DT-CWT (number of NonZero)

NonZero	2000			4000			6000		
	Mutal Info.	I(X;PX)	I(X;CX)	I(X;NX)	I(X;PX)	I(X;CX)	I(X;NX)	I(X;PX)	I(X;CX)
Conventional	0.40	0.48	0.86	0.35	0.46	0.80	0.28	0.45	0.74
Proposed	0.08	0.09	0.18	0.07	0.09	0.16	0.07	0.09	0.14

(同一サブバンド内の 8 近傍) を  $NX$ , cousins (同空間位置, 同レベルの他方向サブバンド) を  $CX$  とし,  $X$  と各変数間の相互情報量を  $I(X;PX)$ ,  $I(X,NX)$  および  $I(X,CX)$  と定義し, 文献 [12] に基づき推定する. このとき,  $I(X;PX)$ ,  $I(X;NX)$  および  $I(X;CX)$  はそれぞれレベル間, サブバンド内およびサブバンド間の相関性をあらわしている. 表 1, 3 は DT-CWT のレベル 1 の 15° 方向サブバンドに属する  $X$  に着目した相互情報量, 表 2 は DWT のレベル 1 の各方向サブバンドに属する  $X$  に着目した相互情報量をあらわしている.

表 1 において反復回数が多いほど, つまり理想的な疎表現に近づくほど相互情報量が小さくなる. よって, 疎表現はウェーブレット係数間の相関性を小さくする. また, 表 3 において終了個数が多いほど相互情報量が小さくなっている. これは終了個数が少ないときは, より低域成分をあらわす基底で疎表現を見つけようとするため, 高域成分の基底に関連する係数が疎表現の影響を受けにくいと考えられる.

#### 6.4 符号化への考察

Noise Shaping を符号化へ適用する場合, 2 つのパラメータは次のような基準で決定できる. 図 6(c) より Noise Shaping で求めた疎表現は, 終了個数 (*NonZero*) 近辺の非ゼロ係数では高い PSNR を与えるが, それ以外の非ゼロ係数の個数については PSNR が低くなる. よって, 送信する非ゼロ係数の個数と終了個数を一致させると, その個数において最も高い PSNR が得られる. この個数はターゲットビットレートにより変化するため, ビットレートより推定する必要がある. また, 表 3 より終了個数が少ないほど反復処理終了後も多くの冗長性が残り, 付加的な処理を行うことでさらに符号化効率を高めることができる. 反復回数 (*Iteration*) は, エンコーダにおける処理時間を考慮し決定する. このとき, 図 6(c), 表 1 より反復回数が多いほど高い Energy Compaction が得られるが, ウェーブレット係数間の相関性が低くなる.

複素数として係数を選択した場合は実部, 虚部から独立に選択した場合と比べ Energy Compaction は低いが, 反復処理終了時においてもウェーブレット係数間に非常に高い相関が残っている. また, 絶対値と位相に分けて量子化, エントロピー符号化を行うことが可能である [14].

### 7. まとめと今後の課題

本稿では, 複素ウェーブレットにおいて疎表現を求める Noise Shaping が L0 ノルムベースの疎表現近似手法と等価であることを示し, その等価性に基づき, 従来とは異なる係数選択

の手法を提案した. 実験より, 提案手法において高い Energy Compaction を得られることを確認した. また Noise Shaping の反復処理を定義する 2 つのパラメータと求まる疎表現の関係を Energy Compaction と相互情報量を用いて考察した.

今後は複素ウェーブレットを用いた画像符号化の実現を目指し, Noise Shaping の性能を Basis Pursuit (または BPDN) と比較すると共に, 求めた疎表現に残されている冗長性をさらに削減する手法を検討する.

### 文献

- [1] N. G. Kingsbury, "Complex wavelet for shift invariant analysis and filtering of signals," ACHA, vol. 10, no. 3, pp. 234-253, May 2002.
- [2] I. W. Selesnick, R. G. Baraniuk and N. G. Kingsbury, "The Dual-Tree Complex Wavelet Transform," IEEE Signal Processing Magazine, Nov. 2005.
- [3] R. M. Figueras i Ventura, *et al.*, "Low-rate and flexible image coding with redundant representations", IEEE Trans. Image Processing, Vol. 15, No. 3, Mar. 2006.
- [4] N. G. Kingsbury and T. H. Reeves, "Iterative image coding with overcomplete complex wavelet transforms," Proc. Conf. on VCIP, July 2003.
- [5] S. G. Mallat and Z. Zhang, "Matching Pursuit With Time-Frequency Dictionaries," IEEE Transaction on Signal Processing, vol. 41, no. 12, pp. 3397-3415, December 1993.
- [6] S. Chen, D. L. Donoho and M. A. Saunders, "Atomic decomposition by basis pursuit," SIAM J. Scientific Comp., vol. 20, pp. 33-61, 1999.
- [7] L. Mancera and J. Portilla, "L0-norm-based sparse representation through alternate projections," IEEE ICIP, Oct. 2006.
- [8] H. Bölcskei, F. Hlawatsch, "Oversampled filter bank: Optimal noise shaping, design freedom, and noise analysis", Proc. IEEE ICASSP, vol. 3, pp. 2453-2456, April 1997.
- [9] D. L. Donoho, M. Elad and V. N. Temlyakov, "Stable recovery of sparse overcomplete representations in the presence of noise," IEEE Trans. Information Theory, vol. 52, pp. 6-18, Jan. 2006.
- [10] D. C. Youla, "Generalized Image Restoration by the Method of Alternating Orthogonal Projections," IEEE Trans. Circuits and Syst., CAS-25, 9, 1978.
- [11] P. S. Huggins and S. W. Zucker, "Greedy Basis Pursuit," IEEE Trans. Signal Processing, vol. 2, pp. 3760-3772, July 2007.
- [12] J. Liu and P. Moulin, "Information-theoretic analysis of interscale and intrascale dependencies between image wavelet coefficients," IEEE Trans. Image Processing, vol. 10, no. 11, pp. 1647-1658, 2001.
- [13] J. Yang, W. Xu Q. Dai and Y. Wang, "Image Compression using 2D Dual-Tree Discrete Wavelet Transform (DDWT)," IEEE ISCAS, May 2007.
- [14] T. H. Reeves and N. G. Kingsbury, "R-D quantisation of complex coefficients in zerotree coding," IEEE SSP, 2001.