

信号理論

- No.8 ウェーブレット -

渡辺 裕

信号理論 / Signal Theory

1

Signal Theory

- No.8 Wavelet -

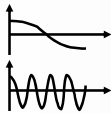
Hiroshi Watanabe

信号理論 / Signal Theory

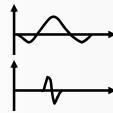
2

ウェーブレット

- ウェーブレットとは、基本フィルタの周波数解像度と時間解像度を変化されたフィルタ群を用いて、信号を表現する手法
- DFT(離散フーリエ変換)は長時間の信号を観察し、高い周波数解像度により信号を分析しようとする手法
- サブバンド分析は、一定の時間解像度および一定の周波数解像度を持つフィルタ群を用いて、信号を表現する手法



フーリエ変換



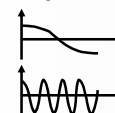
ウェーブレット変換

信号理論 / Signal Theory

3

Wavelet

- Wavelet is a technique to describe signal using a set of filters having varied frequency and time axis resolutions based on a basic filter
- DFT(Discrete Fourier Transform) is a technique to analyze signal using maximum frequency resolution in a long term
- Subband analysis is a technique to describe signal using filters having certain frequency and time axis resolution



Fourier Transform



Wavelet Transform

信号理論 / Signal Theory

4

ウェーブレット (2)

- 連続系のウェーブレット信号
 - dilation: スケールを変えるパラメータ a による操作
 - translation: シフトパラメータ b による操作

$$x_{a,b}(t) = \frac{1}{\sqrt{a}} x\left(\frac{t-b}{a}\right)$$

- ウェーブレットのフーリエ変換

$$X_{a,b}(\omega) = \sqrt{a} X(a\omega) \exp(-j\omega b)$$

信号理論 / Signal Theory

5

Wavelet (2)

- Continuous Wavelet signal
 - dilation: operation by scaling parameter a
 - translation: operation by shift parameter b

$$x_{a,b}(t) = \frac{1}{\sqrt{a}} x\left(\frac{t-b}{a}\right)$$

- Fourier transform of Wavelet

$$X_{a,b}(\omega) = \sqrt{a} X(a\omega) \exp(-j\omega b)$$

信号理論 / Signal Theory

6

復習

■ フーリエ変換

$$X(\omega) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \exp(-j\omega t) dt$$

■ 信号の拡大・縮小に対するフーリエ変換

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} x\left(\frac{t}{a}\right) \exp(-j\omega t) dt &= \int_{-\infty}^{\infty} x(s) \exp(-j\omega a s) a ds \\ &= a \int_{-\infty}^{\infty} x(s) \exp(-j(\omega a) s) ds \\ &= aX(a\omega) \end{aligned} \quad \begin{aligned} s &\equiv \frac{t}{a} \\ ds &= \frac{1}{a} dt \end{aligned}$$

信号理論 / Signal Theory

7

Review

■ Fourier Transform

$$X(\omega) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \exp(-j\omega t) dt$$

■ Fourier Transform for expanded (shrunk) signal

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} x\left(\frac{t}{a}\right) \exp(-j\omega t) dt &= \int_{-\infty}^{\infty} x(s) \exp(-j\omega a s) a ds \\ &= a \int_{-\infty}^{\infty} x(s) \exp(-j(\omega a) s) ds \\ &= aX(a\omega) \end{aligned} \quad \begin{aligned} s &\equiv \frac{t}{a} \\ ds &= \frac{1}{a} dt \end{aligned}$$

信号理論 / Signal Theory

8

復習 (2)

■ 信号のシフトに対するフーリエ変換

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} x(t-b) \exp(-j\omega t) dt &= \int_{-\infty}^{\infty} x(s) \exp(-j\omega(s+b)) ds \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x(s) \exp(-j\omega s) \exp(-j\omega b) ds \\ &= \exp(-j\omega b) \int_{-\infty}^{\infty} x(s) \exp(-j\omega s) ds \\ &= \exp(-j\omega b) X(\omega) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} s &\equiv t-b \\ ds &= dt \end{aligned}$$

信号理論 / Signal Theory

9

Review (2)

■ Fourier Transform for shifted signal

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} x(t-b) \exp(-j\omega t) dt &= \int_{-\infty}^{\infty} x(s) \exp(-j\omega(s+b)) ds \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x(s) \exp(-j\omega s) \exp(-j\omega b) ds \\ &= \exp(-j\omega b) \int_{-\infty}^{\infty} x(s) \exp(-j\omega s) ds \\ &= \exp(-j\omega b) X(\omega) \end{aligned}$$

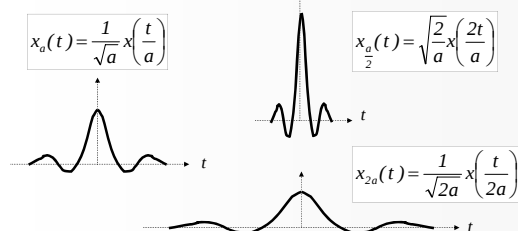
$$\begin{aligned} s &\equiv t-b \\ ds &= dt \end{aligned}$$

信号理論 / Signal Theory

10

ウェーブレット (3)

■ dilationによる信号波形の変化

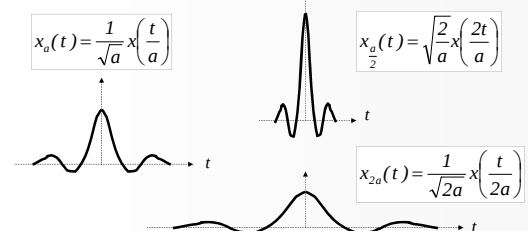


信号理論 / Signal Theory

11

Wavelet (3)

■ Signal variation by dilation

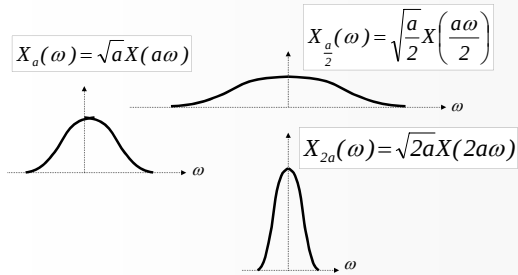


信号理論 / Signal Theory

12

ウェーブレット (4)

- dilationによるスペクトルの変化

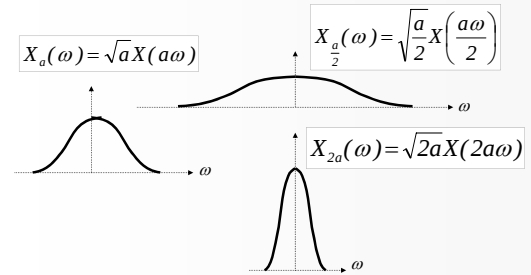


信号理論 / Signal Theory

13

Wavelet (4)

- Spectrum variation by dilation

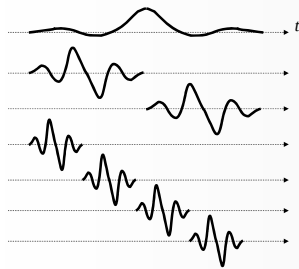


信号理論 / Signal Theory

14

ウェーブレット変換

- Translation パラメータを用いて直交基底を作成

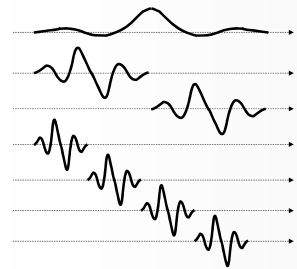


信号理論 / Signal Theory

15

Wavelet Transform

- Create orthogonal basis using Translation parameter



信号理論 / Signal Theory

16

離散ウェーブレット

- dilation と translation のパラメータを離散化

$$a = 2^m, \quad b = n2^m$$

- 離散ウェーブレット基底関数

$$x_{m,n}(t) = 2^{-\frac{m}{2}} x(2^{-m}t - n)$$

- $x(t)$ を正規直交化した関数 $\phi(t)$ を定義すると、 $H_0(z)$, $H_1(z)$ のインパルス応答 $h_0(n)$, $h_1(n)$ に対して次式が成り立つ

$$\phi(t) = 2 \sum_{n=0}^{N-1} h_0(n) \phi(2t - n) \quad \varphi(t) = 2 \sum_{n=0}^{N-1} h_1(n) \phi(2t - n)$$

信号理論 / Signal Theory

17

Discrete Wavelet

- Discretized dilation and translation parameters

$$a = 2^m, \quad b = n2^m$$

- Basis function of discrete wavelet

$$x_{m,n}(t) = 2^{-\frac{m}{2}} x(2^{-m}t - n)$$

- Define function $\phi(t)$ which is orthogonalized $x(t)$, consider $h_0(n)$, $h_1(n)$ which are impulse responses of $H_0(z)$, $H_1(z)$

$$\phi(t) = 2 \sum_{n=0}^{N-1} h_0(n) \phi(2t - n) \quad \varphi(t) = 2 \sum_{n=0}^{N-1} h_1(n) \phi(2t - n)$$

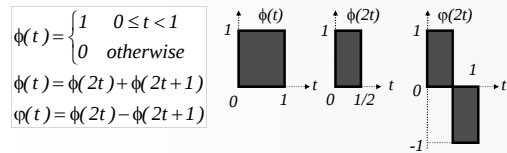
信号理論 / Signal Theory

18

ハール変換

- 最も簡単なウェーブレット
- 低域フィルタ $H_0(z)$, 高域フィルタ $H_1(z)$

$$H_0(z) = \frac{1+z^{-1}}{\sqrt{2}} \quad H_1(z) = \frac{1-z^{-1}}{\sqrt{2}}$$



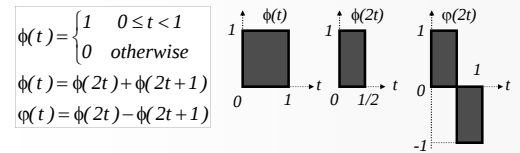
信号理論 / Signal Theory

19

Harr Transform

- The simplest wavelet
- LPF: $H_0(z)$, HPF: $H_1(z)$

$$H_0(z) = \frac{1+z^{-1}}{\sqrt{2}} \quad H_1(z) = \frac{1-z^{-1}}{\sqrt{2}}$$



信号理論 / Signal Theory

20

ハール変換 (2)

- 1次元8点ハール変換行列の例

$$\begin{bmatrix} X(0) \\ X(1) \\ \vdots \\ X(7) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(0) \\ x(1) \\ \vdots \\ x(7) \end{bmatrix}$$

信号理論 / Signal Theory

21

Harr Transform (2)

- 1-D 8-point Harr transform matrix

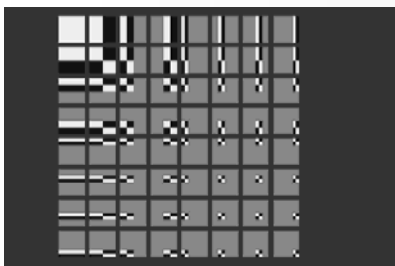
$$\begin{bmatrix} X(0) \\ X(1) \\ \vdots \\ X(7) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(0) \\ x(1) \\ \vdots \\ x(7) \end{bmatrix}$$

信号理論 / Signal Theory

22

ハール変換基底

- 8x8 ハール変換の基底ベクトル

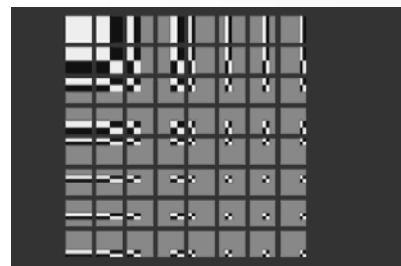


信号理論 / Signal Theory

23

Harr Transform Basis

- 8x8 Harr transform basis

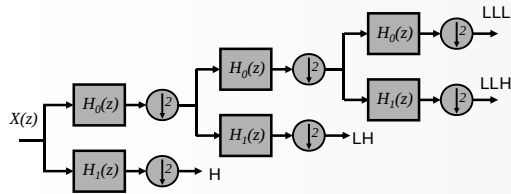


信号理論 / Signal Theory

24

オクターブ分割

- 4バンドフィルタバンクの構成

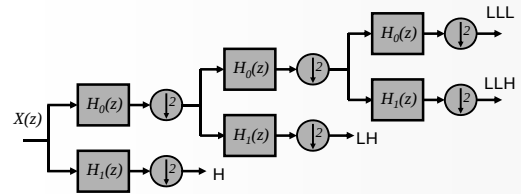


信号理論 / Signal Theory

25

Octave Splitting

- 4-band (diadic) filterbank structure

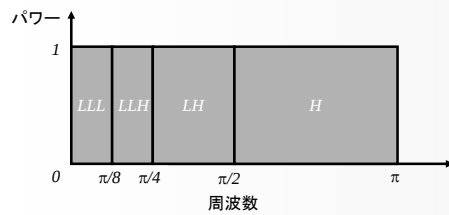


信号理論 / Signal Theory

26

オクターブ分割 (2)

- オクターブ分割のフィルタバンクの周波数特性(4band)

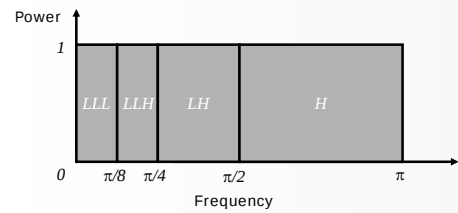


信号理論 / Signal Theory

27

Octave Splitting (2)

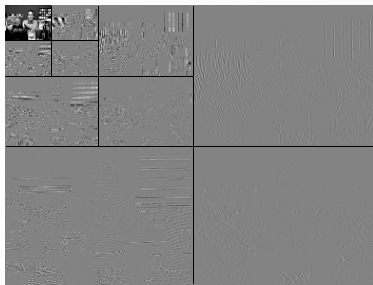
- Frequency responses of ideal octave splitting filterbank (4-band diadic)



信号理論 / Signal Theory

28

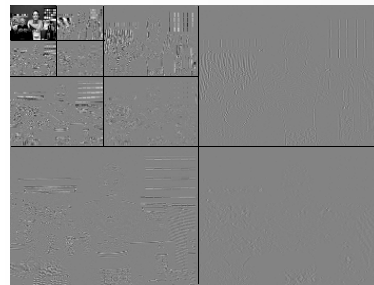
ウェーブレット変換画像



信号理論 / Signal Theory

29

Wavelet Transform Image



信号理論 / Signal Theory

30

ウェーブレット変換画像 (2)

- DWTとDCTの最低周波数成分(1/64)



DWT



DCT

信号理論 / Signal Theory

31

Wavelet Transform Image (2)

- The lowest frequency component of DWT and DCT (1/64)



DWT



DCT

信号理論 / Signal Theory

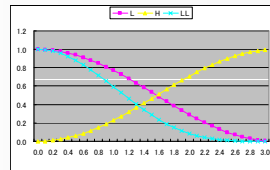
32

周波数特性の計算例

- Excel による周波数特性の計算

$$H_0(z) = \frac{1}{4}z^{-1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}z^1$$

$$H_1(z) = -\frac{1}{4}z^{-1} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4}z^1$$



信号理論 / Signal Theory

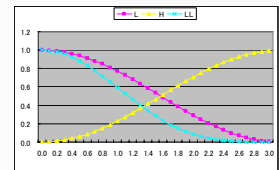
33

Example of Frequency Response

- Calculation of frequency response using Excel

$$H_0(z) = \frac{1}{4}z^{-1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}z^1$$

$$H_1(z) = -\frac{1}{4}z^{-1} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4}z^1$$



信号理論 / Signal Theory

34

JPEG 2000

- Joint Photographic Experts Group
 - ISO/IEC JTC1/SC29/WG1 で作成
 - 静止画像(RGB各8ビットの24ビットカラー画像)
 - 非可逆から可逆まで連続的に導出可能な符号化
 - ウェーブレット + EBCOT(算術符号化)
 - ISO/IEC 15444: 2000
- ウェーブレット
 - リフティング, 線形量子化
 - EBCOT(Embedded Block Coding with Optimized Truncation), 複数コンテキストの算術符号化(MQ-coder)

信号理論 / Signal Theory

35

JPEG 2000

- Joint Photographic Experts Group
 - ISO/IEC JTC1/SC29/WG1
 - Still Image(RGB各8ビットの24ビットカラー画像)
 - From lossy to lossless
 - Wavelet + EBCOT(Arithmetic coding)
 - ISO/IEC 15444: 2000
- Wavelet
 - Lifting scheme, linear quantizer
 - EBCOT(Embedded Block Coding with Optimized Truncation), multi-context arithmetic coding(MQ-coder)

信号理論 / Signal Theory

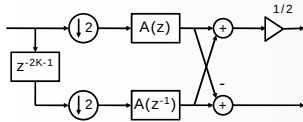
36

オールパスフィルタによる実現

- オールパスフィルタ $A(z)$ によるLPFとHPF

$$H_0(z) = \frac{\sqrt{2}}{2} \{z^{-2K-1} A(z^{-2}) + A(z^2)\}$$

$$H_1(z) = \frac{\sqrt{2}}{2} \{z^{-2K-1} A(z^{-2}) - A(z^2)\}$$



信号理論 / Signal Theory

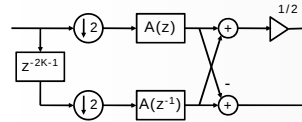
37

Representation by All Pass Filter

- LPF, HPF are created by all pass filter $A(z)$

$$H_0(z) = \frac{\sqrt{2}}{2} \{z^{-2K-1} A(z^{-2}) + A(z^2)\}$$

$$H_1(z) = \frac{\sqrt{2}}{2} \{z^{-2K-1} A(z^{-2}) - A(z^2)\}$$



信号理論 / Signal Theory

38

オールパスフィルタ

- 次数 N 次のオールパスフィルタ

$$A(z) = z^{-N} \frac{\sum_{n=0}^N a_n z^n}{\sum_{n=0}^N a_n z^{-n}}$$

- 周波数特性

$$A(e^{j\omega}) = z^{-N\omega} \frac{\sum_{n=0}^N a_n \{\cos(n\omega) + j \sin(n\omega)\}}{\sum_{n=0}^N a_n \{\cos(n\omega) - j \sin(n\omega)\}}$$

$$\theta(\omega) = -N\omega + 2 \tan^{-1} \frac{\sum_{n=0}^N a_n \sin(n\omega)}{\sum_{n=0}^N a_n \cos(n\omega)}$$

信号理論 / Signal Theory

39

All Pass Filter

- N -th order all pass filter $A(z)$

$$A(z) = z^{-N} \frac{\sum_{n=0}^N a_n z^n}{\sum_{n=0}^N a_n z^{-n}}$$

- Frequency responses

$$A(e^{j\omega}) = z^{-N\omega} \frac{\sum_{n=0}^N a_n \{\cos(n\omega) + j \sin(n\omega)\}}{\sum_{n=0}^N a_n \{\cos(n\omega) - j \sin(n\omega)\}}$$

$$\theta(\omega) = -N\omega + 2 \tan^{-1} \frac{\sum_{n=0}^N a_n \sin(n\omega)}{\sum_{n=0}^N a_n \cos(n\omega)}$$

信号理論 / Signal Theory

40

オールパスフィルタ (2)

- LPF, HPFの周波数特性は直線位相

$$H_0(e^{j\omega}) = \sqrt{2}^{-j(k+\frac{1}{2})} \cos\left[\theta(2\omega) + \left(k + \frac{1}{2}\right)\omega\right]$$

$$H_1(e^{j\omega}) = \sqrt{2}^{-j(k+\frac{1}{2})} \sin\left[\theta(2\omega) + \left(k + \frac{1}{2}\right)\omega\right]$$

- 振幅は直交

$$|H_0(e^{j\omega})|^2 + |H_1(e^{j\omega})|^2 = 2$$

信号理論 / Signal Theory

41

All Pass Filter (2)

- Frequency Characteristics of LPF, HPF are linear phase

$$H_0(e^{j\omega}) = \sqrt{2}^{-j(k+\frac{1}{2})} \cos\left[\theta(2\omega) + \left(k + \frac{1}{2}\right)\omega\right]$$

$$H_1(e^{j\omega}) = \sqrt{2}^{-j(k+\frac{1}{2})} \sin\left[\theta(2\omega) + \left(k + \frac{1}{2}\right)\omega\right]$$

- Amplitudes are in an orthogonal relation

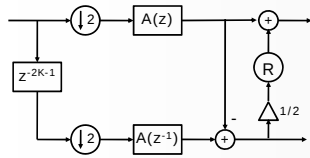
$$|H_0(e^{j\omega})|^2 + |H_1(e^{j\omega})|^2 = 2$$

信号理論 / Signal Theory

42

リフティングによる実現

- リフティング(R)による整数化処理

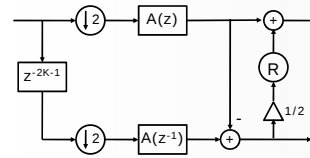


信号理論 / Signal Theory

43

Representation by Lifting

- Integer operation by (R)



信号理論 / Signal Theory

44

問題

- S変換($y(1)=(a+b)/2$, $y(2)=a-b$)を以下の2次元データに適用せよ.

128	132	134	141
126	128	130	135
120	125	128	133
125	130	134	131

信号理論 / Signal Theory

45

Quiz

- Apply S-transform ($y(1)=(a+b)/2$, $y(2)=a-b$) to the 2-dimensional data below.

128	132	134	141
126	128	130	135
120	125	128	133
125	130	134	131

信号理論 / Signal Theory

46