

信号理論

- No.7 サブバンドと完全再構成 -

渡辺 裕

信号理論 / Signal Theory

1

Signal Theory

- No.7 Subband and Perfect Reconstruction -

Hiroshi Watanabe

信号理論 / Signal Theory

2

サブバンド

- 通過周波数帯域の限られたフィルタを適用することにより、特定の周波数帯域のサンプルだけを処理する手法
- 用いるフィルタをサブバンドフィルタと呼ぶ
- サブバンド出力を間引き、量子化することにより、変換符号化と等価になる
- チャネルイコライザー(伝送等化器)、オーディオイコライザー(オーディオ周波数調整器)、オーディオ符号化などに応用される
- 主にFIRフィルタが用いられる

信号理論 / Signal Theory

3

Subband

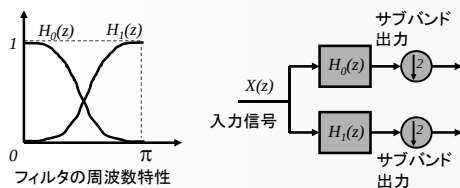
- Processing samples having specified frequency range by applying limited bandwidth filter
- Filter is called "Subband Filter"
- It equals to transform coding by applying decimation and quantization to subband outputs
- Application: Channel equalizer (Transmission equalizer), Audio equalizer, Audio coding
- In most cases, FIR filter

信号理論 / Signal Theory

4

サブバンドフィルタ

- 最も簡単なサブバンド処理は2バンド分割
- 低域通過型FIRフィルタ $H_0(z)$ および高域通過型FIRフィルタ $H_1(z)$ による構成
- サブバンド出力は1:2にダウンサンプル(サブサンプル)される

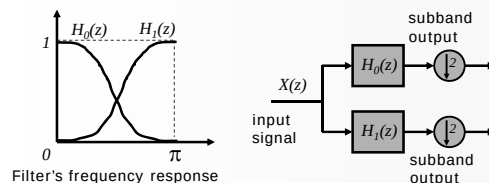


信号理論 / Signal Theory

5

Subband Filter

- The simplest subband is two-band
- Consists of Low pass FIR filter $H_0(z)$ and High pass FIR filter $H_1(z)$
- Subband output is down-sampled to 1:2 (subsample)

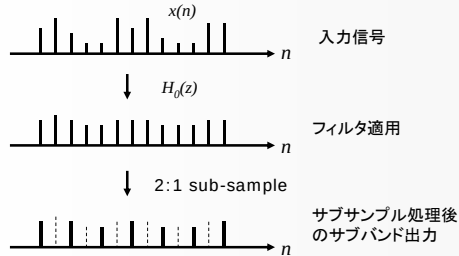


信号理論 / Signal Theory

6

サブバンドフィルタ (2)

■ 2:1サブサンプリング

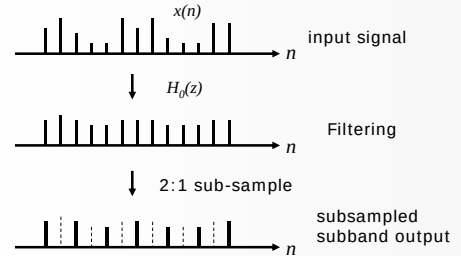


信号理論 / Signal Theory

7

Subband Filter (2)

■ 2:1Subsample



信号理論 / Signal Theory

8

ハーフバンドフィルタ

■ ハーフバンドフィルタ $H(z)$ の定義

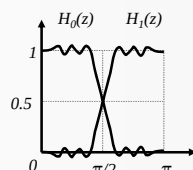
$$H(z) = H(z^{-1})$$

$$H(z) + H(-z^{-1}) = 1$$

■ 周波数特性

- 周波数特性は $\pi/2$ で対称
- 対称なフィルタ特性と加算すると1になる

$$H(e^{j\omega}) + H(-e^{-j\omega}) = H(e^{j\omega}) + H(e^{j(\pi-\omega)}) = 1$$



信号理論 / Signal Theory

9

Halfband Filter

■ Definition of halfband filter $H(z)$

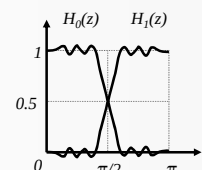
$$H(z) = H(z^{-1})$$

$$H(z) + H(-z^{-1}) = 1$$

■ Frequency response

- Symmetric at $\pi/2$
- Sum of two filters response equals to 1

$$H(e^{j\omega}) + H(-e^{-j\omega}) = H(e^{j\omega}) + H(e^{j(\pi-\omega)}) = 1$$



信号理論 / Signal Theory

10

ハーフバンドフィルタ (2)

■ インパルス応答の性質

$$h(n) + (-1)^n h(n) = \delta(n)$$

$$h(n) = \begin{cases} 1/2 & (n=0) \\ 0 & (n=\text{even}, n \neq 0) \end{cases}$$

$$H(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n)z^{-n} = \dots + h(-1)z^1 + h(0)z^0 + h(1)z^{-1} + \dots$$

$$H(z^{-1}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n)z^n = \dots + h(-1)z^{-1} + h(0)z^0 + h(1)z^1 + \dots$$

$$H(-z^{-1}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n)(-z)^n = \dots + h(-2)z^{-2} - h(-1)z^{-1} + h(0)z^0 - h(1)z^1 + h(2)z^2 \dots$$

信号理論 / Signal Theory

11

Halfband Filter (2)

■ Characteristic of impulse response

$$h(n) + (-1)^n h(n) = \delta(n)$$

$$h(n) = \begin{cases} 1/2 & (n=0) \\ 0 & (n=\text{even}, n \neq 0) \end{cases}$$

$$H(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n)z^{-n} = \dots + h(-1)z^1 + h(0)z^0 + h(1)z^{-1} + \dots$$

$$H(z^{-1}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n)z^n = \dots + h(-1)z^{-1} + h(0)z^0 + h(1)z^1 + \dots$$

$$H(-z^{-1}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n)(-z)^n = \dots + h(-2)z^{-2} - h(-1)z^{-1} + h(0)z^0 - h(1)z^1 + h(2)z^2 \dots$$

信号理論 / Signal Theory

12

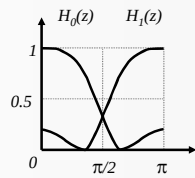
ミラーフィルタ

■ ミラーフィルタの定義

$$\begin{aligned} H_1(z) &= H_0(-z) \\ H_1(e^{j\omega}) &= H_0(e^{j(\omega-\pi)}) \\ h_1(n) &= (-1)^n h_0(n) \end{aligned}$$

■ 周波数特性

- 周波数特性は $\pi/2$ で対称
- 対称なフィルタ特性と加算すると1にならない



信号理論 / Signal Theory

13

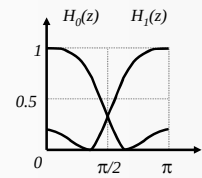
Mirror Filter

■ Definition of mirror filter

$$\begin{aligned} H_1(z) &= H_0(-z) \\ H_1(e^{j\omega}) &= H_0(e^{j(\omega-\pi)}) \\ h_1(n) &= (-1)^n h_0(n) \end{aligned}$$

■ Frequency response

- Symmetric at $\pi/2$
- Sum of two filters response does not equals to 1

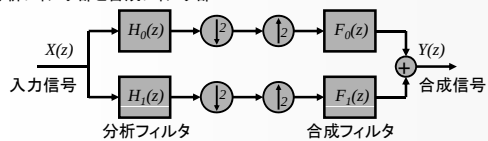


信号理論 / Signal Theory

14

分析・合成

■ 分析フィルタ部と合成フィルタ部



■ 完全再構成条件

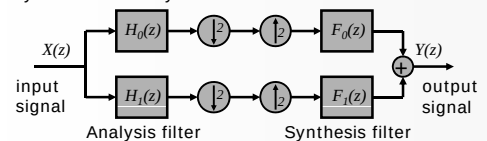
$$\begin{aligned} H_0(-z)F_0(z) + H_1(-z)F_1(z) &= 0 \\ H_0(z)F_0(z) + H_1(z)F_1(z) &= 2z^{-L} \end{aligned}$$

信号理論 / Signal Theory

15

Analysis and Synthesis

■ Analysis filters and Synthesis filters



■ Condition for Perfect Reconstruction

$$\begin{aligned} H_0(-z)F_0(z) + H_1(-z)F_1(z) &= 0 \\ H_0(z)F_0(z) + H_1(z)F_1(z) &= 2z^{-L} \end{aligned}$$

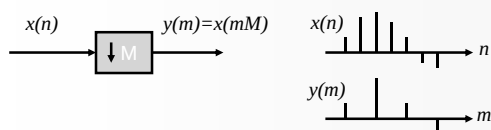
信号理論 / Signal Theory

16

完全再構成

■ ダウンサンプルのz変換表現

$$Y(z) = \frac{1}{M} \sum_{k=0}^{M-1} X(z^{\frac{1}{M}} \exp(-j2\pi k / M))$$



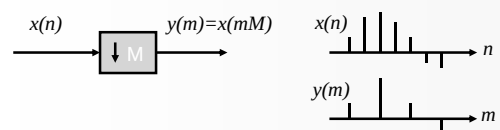
信号理論 / Signal Theory

17

Perfect Reconstruction

■ Z-transform representation for down sampling

$$Y(z) = \frac{1}{M} \sum_{k=0}^{M-1} X(z^{\frac{1}{M}} \exp(-j2\pi k / M))$$



信号理論 / Signal Theory

18

完全再構成 (2)

- ダウンサンプリングはM周期デルタ関数と $x(n)$ の畳み込み

$$i(n) = \sum_{r=-\infty}^{\infty} \delta(n-rM) = \frac{1}{M} \sum_{k=0}^{M-1} \exp(j2\pi k / M)$$

- デルタ関数は $n = \dots, -2M, -M, 0, M, 2M, \dots$ で 1, 他の場合には 0
- 上式右辺は, 例えば $M=3$ のとき, $n=3k$ (k :整数) で 1, 他の場合 0

$$i(n) = \frac{1}{3} (1 + e^{j\pi 2/3} + e^{j\pi 4/3})$$

信号理論 / Signal Theory

19

Perfect Reconstruction (2)

- Down sampling is convolution of M period delta function and $x(n)$

$$i(n) = \sum_{r=-\infty}^{\infty} \delta(n-rM) = \frac{1}{M} \sum_{k=0}^{M-1} \exp(j2\pi k / M)$$

- delta function is 1 at $n = \dots, -2M, -M, 0, M, 2M, \dots$, otherwise 0
- Right side of above equation equals to 1 at $n=3k$ (k :integer) for $M=3$, otherwise 0

$$i(n) = \frac{1}{3} (1 + e^{j\pi 2/3} + e^{j\pi 4/3})$$

信号理論 / Signal Theory

20

完全再構成 (3)

- $i(n)$ と $x(n)$ の積は

$$i(n)x(n) = \frac{1}{M} \sum_{k=0}^{M-1} x(n) \exp(-j2\pi k / M)$$

- この式をz変換すれば

$$\begin{aligned} & \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{M} \sum_{k=0}^{M-1} x(n) \exp(-j2\pi k / M) z^{-n} \\ &= \frac{1}{M} \sum_{k=0}^{M-1} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) \exp(-jn(\omega - j2\pi k / M)) \\ &= \frac{1}{M} \sum_{k=0}^{M-1} X(z \exp(-j2\pi k / M)) \end{aligned}$$

信号理論 / Signal Theory

21

Perfect Reconstruction (3)

- Product of $i(n)$ and $x(n)$

$$i(n)x(n) = \frac{1}{M} \sum_{k=0}^{M-1} x(n) \exp(-j2\pi k / M)$$

- By applying z-transform

$$\begin{aligned} & \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{M} \sum_{k=0}^{M-1} x(n) \exp(-j2\pi k / M) z^{-n} \\ &= \frac{1}{M} \sum_{k=0}^{M-1} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) \exp(-jn(\omega - j2\pi k / M)) \\ &= \frac{1}{M} \sum_{k=0}^{M-1} X(z \exp(-j2\pi k / M)) \end{aligned}$$

信号理論 / Signal Theory

22

復習

- z変換

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) z^{-n} \quad (z \equiv e^{j\omega})$$

信号理論 / Signal Theory

23

Review

- z-transform

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) z^{-n} \quad (z \equiv e^{j\omega})$$

信号理論 / Signal Theory

24

完全再構成 (4)

- $1/M$ への間引きは、 z 変換では以下のように表される

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} x(nM) z^{-n} = \sum_{s=-\infty}^{\infty} x(s) z^{\frac{1}{M}(-s)} = X(z^{\frac{1}{M}})$$

$$\begin{aligned} s &\equiv nM \\ n &= \frac{1}{M} s \end{aligned}$$

- $x(s)$ の部分が $i(n)x(n)$ に相当するからこれらを合わせるとダウンサンプリングの z 変換表現を得る

$$Y(z) = \frac{1}{M} \sum_{k=0}^{M-1} X(z^{\frac{1}{M}} \exp(-j2\pi k / M))$$

信号理論 / Signal Theory

25

Perfect Reconstruction (4)

- Decimation to $1/M$ by z -transform

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} x(nM) z^{-n} = \sum_{s=-\infty}^{\infty} x(s) z^{\frac{1}{M}(-s)} = X(z^{\frac{1}{M}})$$

$$\begin{aligned} s &\equiv nM \\ n &= \frac{1}{M} s \end{aligned}$$

- $x(s)$ corresponds to $i(n)x(n)$, so that we have z -transform of down sampling

$$Y(z) = \frac{1}{M} \sum_{k=0}^{M-1} X(z^{\frac{1}{M}} \exp(-j2\pi k / M))$$

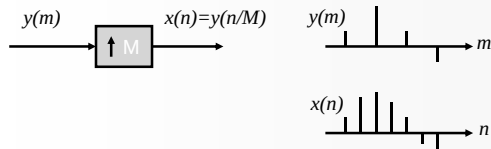
信号理論 / Signal Theory

26

完全再構成 (5)

- アップサンプリングの z 変換表現

$$X(z) = Y(z^M)$$



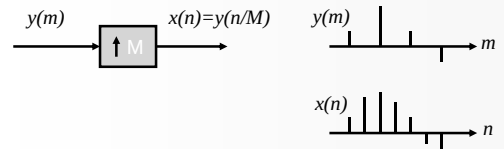
信号理論 / Signal Theory

27

Perfect Reconstruction (5)

- Z -transform representation for up sampling

$$X(z) = Y(z^M)$$



信号理論 / Signal Theory

28

完全再構成 (6)

- なぜなら、 M 倍にサンプリングすると、 z 変換では以下のように表される

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} x(n/M) z^{-n} = \sum_{s=-\infty}^{\infty} x(s) z^{-Ms} = X(z^M)$$

$$\begin{aligned} s &\equiv n/M \\ n &= Ms \end{aligned}$$

信号理論 / Signal Theory

29

Perfect Reconstruction (6)

- Since M times up sampling is represented by z -transform as follows

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} x(n/M) z^{-n} = \sum_{s=-\infty}^{\infty} x(s) z^{-Ms} = X(z^M)$$

$$\begin{aligned} s &\equiv n/M \\ n &= Ms \end{aligned}$$

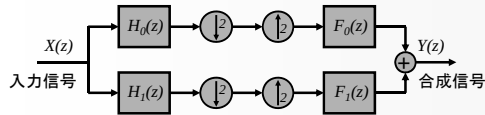
信号理論 / Signal Theory

30

完全再構成 (7)

- フィルタリング、ダウンサンプリング、アップサンプリング、フィルタリングを継続接続した信号をz変換で表現する

$$Y(z) = F_0(z) \frac{1}{2} \sum_{k=0}^1 H_0(z e^{-j2\pi k/2}) X(z e^{-j2\pi k/2}) + F_1(z) \frac{1}{2} \sum_{k=0}^1 H_1(z e^{-j2\pi k/2}) X(z e^{-j2\pi k/2})$$



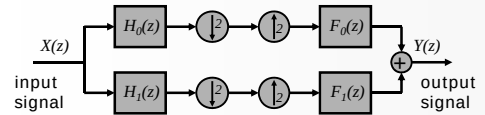
信号理論 / Signal Theory

31

Perfect Reconstruction (7)

- Cascade connection of filtering, down sampling, up sampling and filtering is represented by z-transform

$$Y(z) = F_0(z) \frac{1}{2} \sum_{k=0}^1 H_0(z e^{-j2\pi k/2}) X(z e^{-j2\pi k/2}) + F_1(z) \frac{1}{2} \sum_{k=0}^1 H_1(z e^{-j2\pi k/2}) X(z e^{-j2\pi k/2})$$



信号理論 / Signal Theory

32

完全再構成 (8)

$$\begin{aligned} Y(z) &= F_0(z) \frac{1}{2} \sum_{k=0}^1 H_0(z e^{-j2\pi k/2}) X(z e^{-j2\pi k/2}) \\ &\quad + F_1(z) \frac{1}{2} \sum_{k=0}^1 H_1(z e^{-j2\pi k/2}) X(z e^{-j2\pi k/2}) \\ &= \frac{1}{2} F_0(z) (H_0(z) X(z) + H_0(-z) X(-z)) \\ &\quad + \frac{1}{2} F_1(z) (H_1(z) X(z) + H_1(-z) X(-z)) \\ &= \frac{1}{2} (F_0(z) H_0(z) + F_1(z) H_1(z)) X(z) \\ &\quad + \frac{1}{2} (F_0(z) H_0(-z) + F_1(z) H_1(-z)) X(-z) \end{aligned}$$

信号理論 / Signal Theory

33

Perfect Reconstruction (8)

$$\begin{aligned} Y(z) &= F_0(z) \frac{1}{2} \sum_{k=0}^1 H_0(z e^{-j2\pi k/2}) X(z e^{-j2\pi k/2}) \\ &\quad + F_1(z) \frac{1}{2} \sum_{k=0}^1 H_1(z e^{-j2\pi k/2}) X(z e^{-j2\pi k/2}) \\ &= \frac{1}{2} F_0(z) (H_0(z) X(z) + H_0(-z) X(-z)) \\ &\quad + \frac{1}{2} F_1(z) (H_1(z) X(z) + H_1(-z) X(-z)) \\ &= \frac{1}{2} (F_0(z) H_0(z) + F_1(z) H_1(z)) X(z) \\ &\quad + \frac{1}{2} (F_0(z) H_0(-z) + F_1(z) H_1(-z)) X(-z) \end{aligned}$$

信号理論 / Signal Theory

34

完全再構成 (9)

- 入出力が一致 ($Y(z)=X(z)$) するためには

$$Y(z) = \frac{1}{2} (F_0(z) H_0(z) + F_1(z) H_1(z)) X(z) + \frac{1}{2} (F_0(z) H_0(-z) + F_1(z) H_1(-z)) X(-z)$$

において、1項目が適当な遅延だけを持ち、2項目が0であることが必要であるから

$$\begin{aligned} H_0(-z) F_0(z) + H_1(-z) F_1(z) &= 0 \\ H_0(z) F_0(z) + H_1(z) F_1(z) &= 2z^{-L} \end{aligned}$$

信号理論 / Signal Theory

35

Perfect Reconstruction (9)

- For input and output matching, ($Y(z)=X(z)$)

$$Y(z) = \frac{1}{2} (F_0(z) H_0(z) + F_1(z) H_1(z)) X(z) + \frac{1}{2} (F_0(z) H_0(-z) + F_1(z) H_1(-z)) X(-z)$$

We need arbitrary delay for the 1st term and 0 for the 2nd term

$$\begin{aligned} H_0(-z) F_0(z) + H_1(-z) F_1(z) &= 0 \\ H_0(z) F_0(z) + H_1(z) F_1(z) &= 2z^{-L} \end{aligned}$$

信号理論 / Signal Theory

36

2バンドフィルタ

■ QMF (Quadrature Mirror Filter)

- 完全再構成ではない直線位相フィルタ
- 周波数分離特性に優れる

$$\begin{aligned} H_1(z) &= H_0(-z) \\ F_0(z) &= H_1(-z) \quad F_1(z) = -H_0(-z) \end{aligned}$$

■ CQF (Conjugate Quadrature Filter)

- 完全再構成の非直線位相フィルタ(偶数次係数0のHalfband Filter)

$$\begin{aligned} H_1(z) &= z^{-(N-1)} H_0(-z^{-1}) \\ F_0(z) &= H_1(-z) \quad F_1(z) = H_0(-z) \end{aligned}$$

信号理論 / Signal Theory

37

2-band filter

■ QMF (Quadrature Mirror Filter)

- Linear phase filter, but not Perfect Reconstruction
- Better band splitting

$$\begin{aligned} H_1(z) &= H_0(-z) \\ F_0(z) &= H_1(-z) \quad F_1(z) = -H_0(-z) \end{aligned}$$

■ CQF (Conjugate Quadrature Filter)

- Non linear phase, Perfect Reconstruction (even order coefficients are 0 in Halfband Filter)

$$\begin{aligned} H_1(z) &= z^{-(N-1)} H_0(-z^{-1}) \\ F_0(z) &= H_1(-z) \quad F_1(z) = H_0(-z) \end{aligned}$$

信号理論 / Signal Theory

38

2バンドフィルタ (2)

■ SSKF (Symmetric Short Kernel Filter)

- 直線位相の非直交フィルタ

$$\begin{aligned} F_0(z) &= H_1(-z) \\ F_1(z) &= -H_0(-z) \end{aligned}$$

■ SSKF(5,3)フィルタの係数の例

	n	係数値
$H_0(z)$	0,4	-0.125
	1,3	0.25
	2	0.75
$H_1(z)$	0,2	0.5
	1	-1.0

信号理論 / Signal Theory

39

2-band filter (2)

■ SSKF (Symmetric Short Kernel Filter)

- Linear phase filter, not orthogonal

$$\begin{aligned} F_0(z) &= H_1(-z) \\ F_1(z) &= -H_0(-z) \end{aligned}$$

■ Example of SSKF(5,3) filter

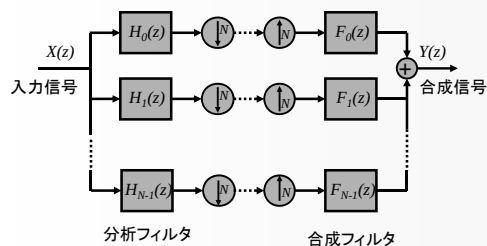
	n	Coeff.
$H_0(z)$	0,4	-0.125
	1,3	0.25
	2	0.75
$H_1(z)$	0,2	0.5
	1	-1.0

信号理論 / Signal Theory

40

Nバンドフィルタ

■ Nバンドフィルタバンクの構成

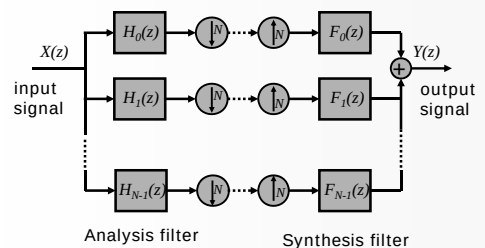


信号理論 / Signal Theory

41

N-band filter

■ Structure of N-band filterbank

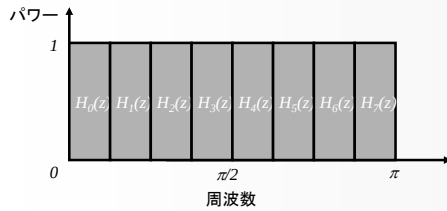


信号理論 / Signal Theory

42

Nバンドフィルタ (2)

- 理想フィルタバンクの周波数特性 (8band)

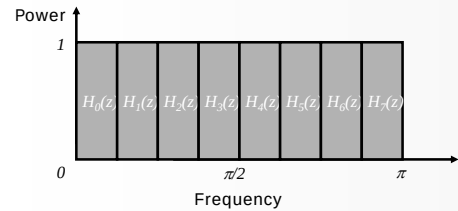


信号理論 / Signal Theory

43

N-band filter (2)

- Ideal frequency response of filterbank (8-band)

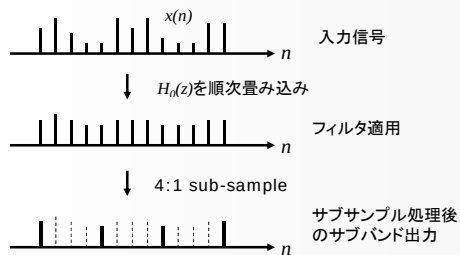


信号理論 / Signal Theory

44

Nバンドフィルタ (3)

- 4バンドの場合のサブバンド出力

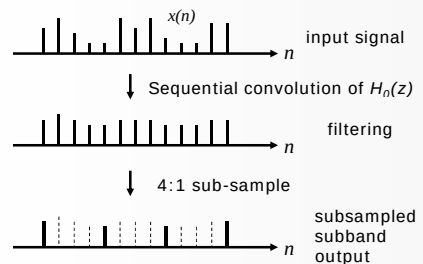


信号理論 / Signal Theory

45

N-band filter (3)

- Subband output at 4-band

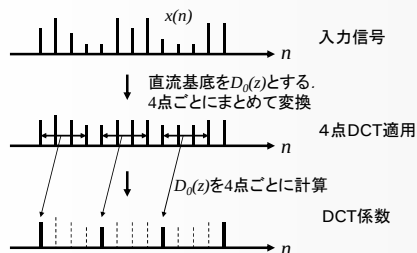


信号理論 / Signal Theory

46

Nバンドフィルタ (4)

- 4点DCTの場合の係数

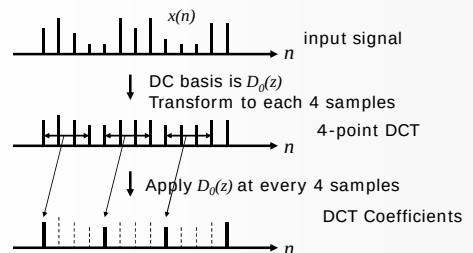


信号理論 / Signal Theory

47

N-band filter (4)

- Coefficient of 4-point DCT

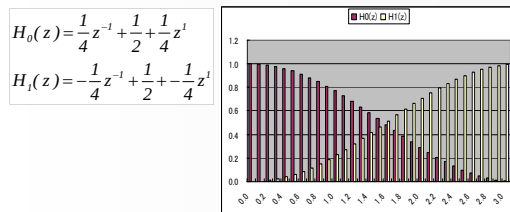


信号理論 / Signal Theory

48

周波数特性の計算例

- Excel による周波数特性の計算

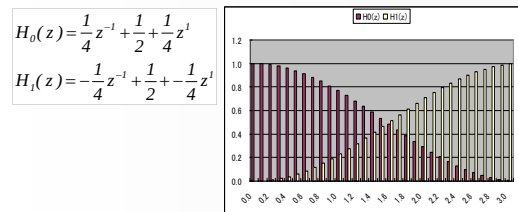


信号理論 / Signal Theory

49

Example of Frequency Response Calculation

- Calculation of Frequency Response using Excel



信号理論 / Signal Theory

50