信号理論

- No.4 フィルタリング -

渡辺　裕

Signal Theory

- No.4 Filtering -

Hiroshi Watanabe

FIRフィルタ

- FIR(Finite Impulse Response):有限インパルス応答
- インパルス応答の値 $h(n)$ が $n<0$ で 0 であり、$n=0,\ldots,N-1$ までの有限の値で定義されるとき、$h(n)$ によって決まる線形システム
- FIRフィルタのインパルス応答の z変換（$z=e^{jw}$, 遅延素子）

$$H(z) = \sum_{n=0}^{N-1} h(n) z^{-n}$$

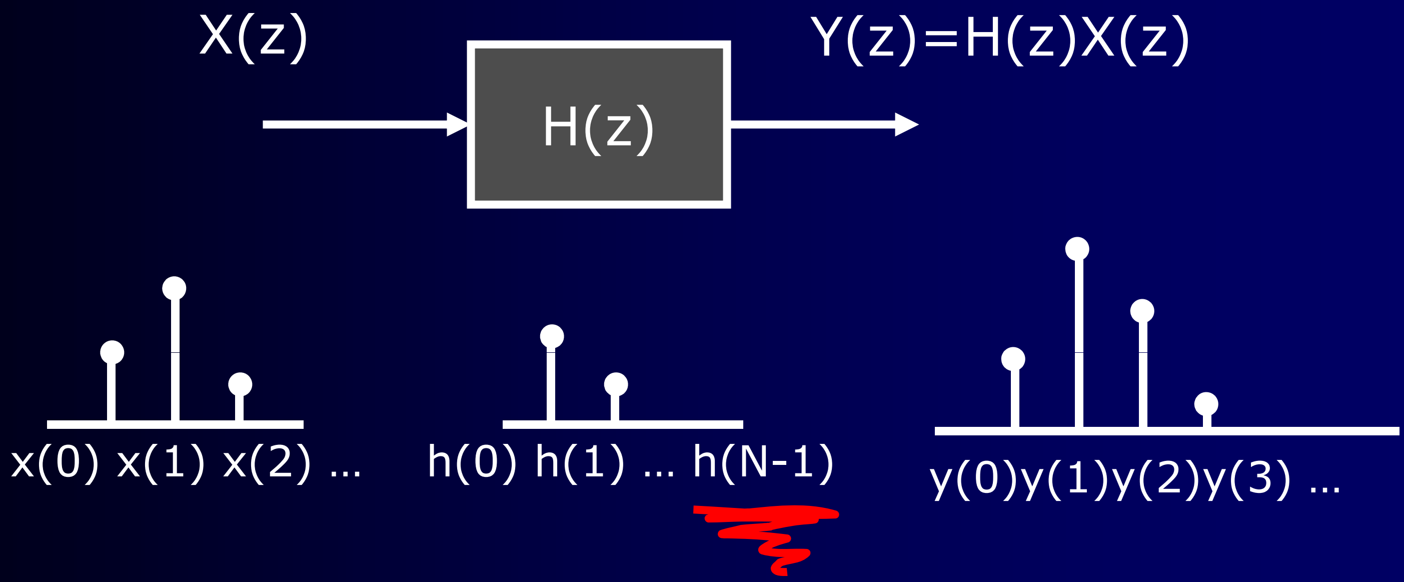
FIR Filter

- FIR: Finite Impulse Response
- FIR filter is a linear system that has the impulse response $h(n)$, which is 0 at $n<0$ and defined in the finite range $n=0,\ldots,N-1$
- z transform of an FIR filter's impulse response can be given by ($z=e^{jw}$, unit delay)

$$H(z)=\sum_{n=0}^{N-1} h(n)z^{-n}$$

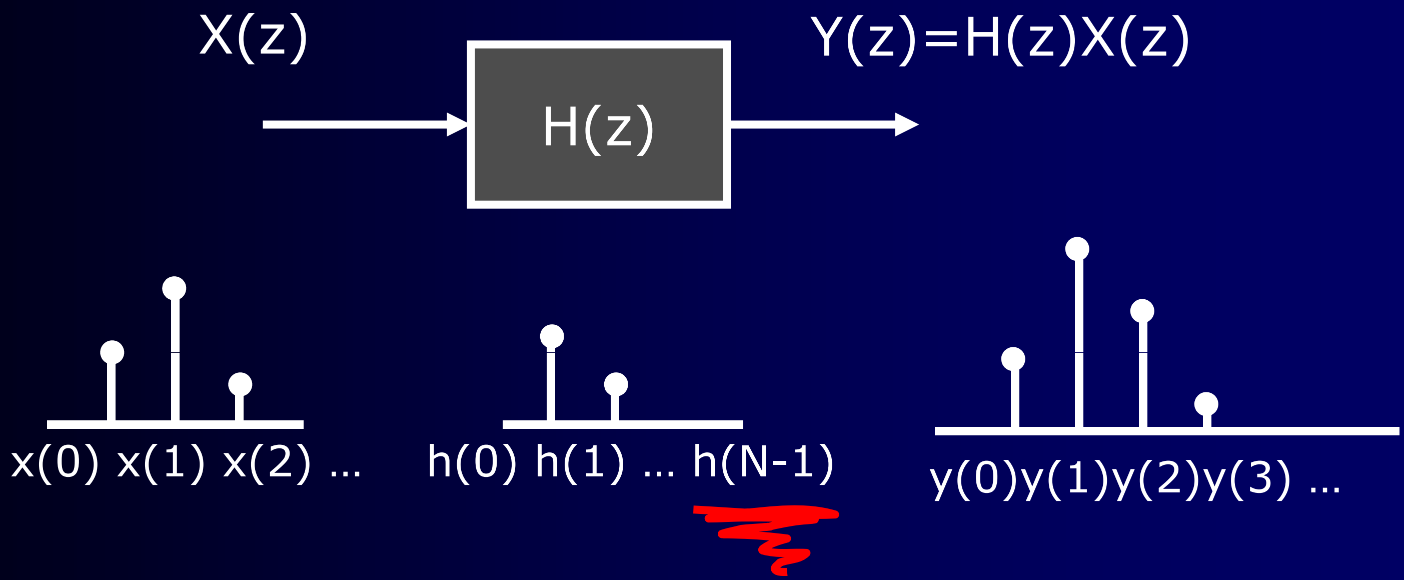
FIRフィルタ (2)

- z-変換による離散時間線形システムの記述



FIR Filter (2)

- Description of the discrete linear system by z transform



FIRフィルタ (3)

- 入出力系列およびフィルタのインパルス応答はz変換で表される

$$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x(n) z^{-n}$$

$$H(z) = \sum_{n=0}^{N-1} h(n) z^{-n}$$

$$Y(z) = \sum_{n=0}^{\infty} y(n) z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{\infty} h(n-k) x(k) \right) z^{-n}$$

FIR Filter (3)

- In and output sequence and filter's impulse response can be written by z transform

$$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x(n) z^{-n}$$

$$H(z) = \sum_{n=0}^{N-1} h(n) z^{-n}$$

$$Y(z) = \sum_{n=0}^{\infty} y(n) z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{\infty} h(n-k) x(k) \right) z^{-n}$$

畳み込み

- ディジタルフィルタ:離散時間線形システム
- 入力に対して出力を観測
- 入出力関係をインパルス応答によって表す

$$y(n) = x(n) * h(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(n-k)x(k)$$

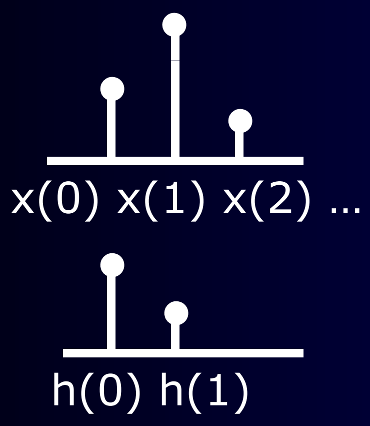
Convolution

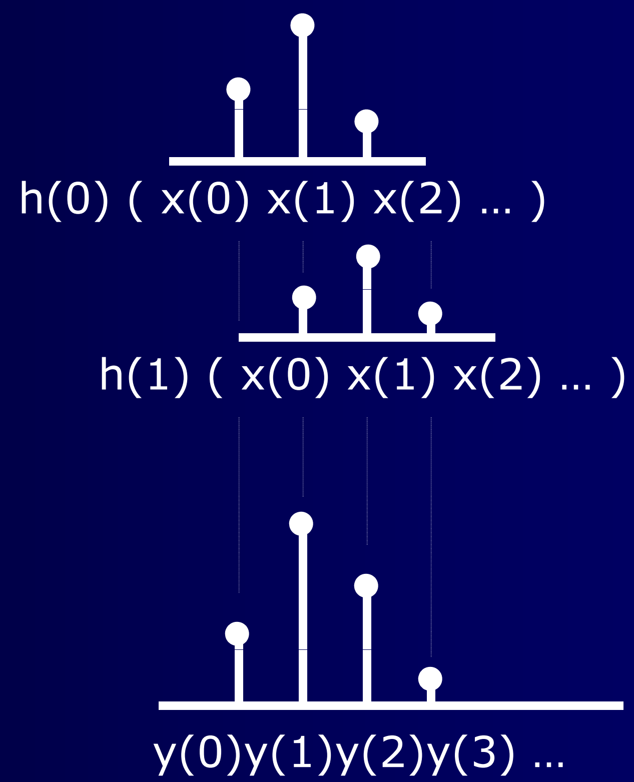
- Digital Filter: Discrete linear system
- Output caused by the input is observed
- Impulse response shows input-output relation

$$y(n) = x(n) * h(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(n-k)x(k)$$

畳み込み (2)

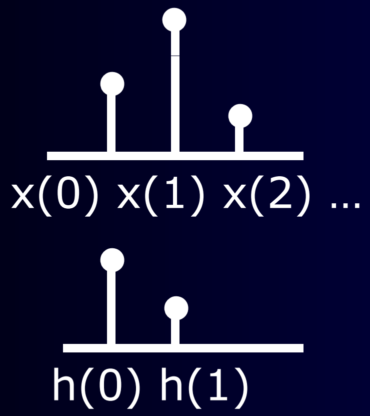
- 時刻 $n<0$ で信号が 0 と仮定したときの畳み込み

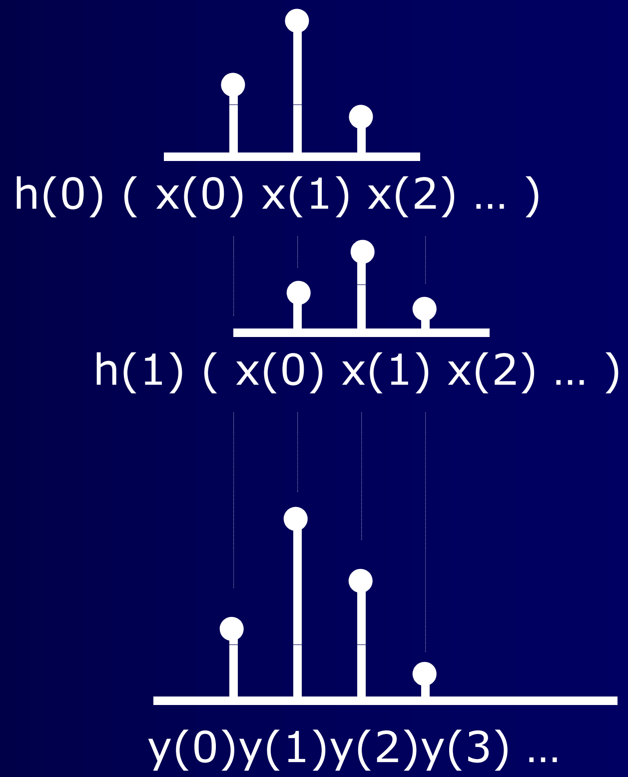




Convolution (2)

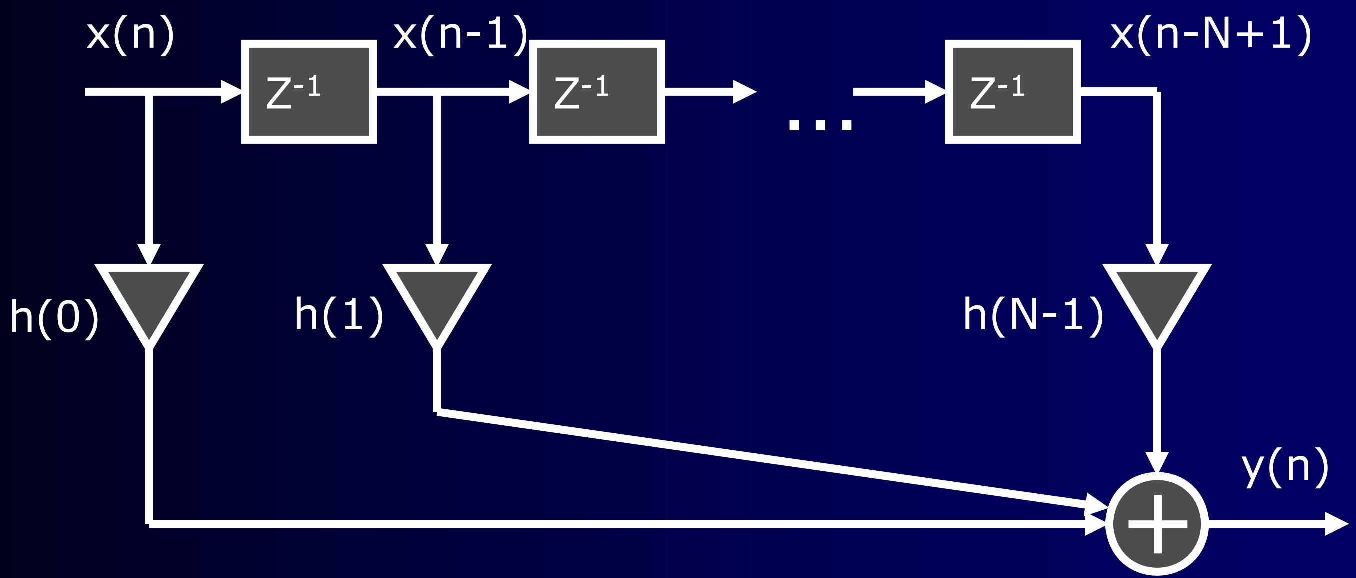
- Convolution when signal is 0 at time $n<0$





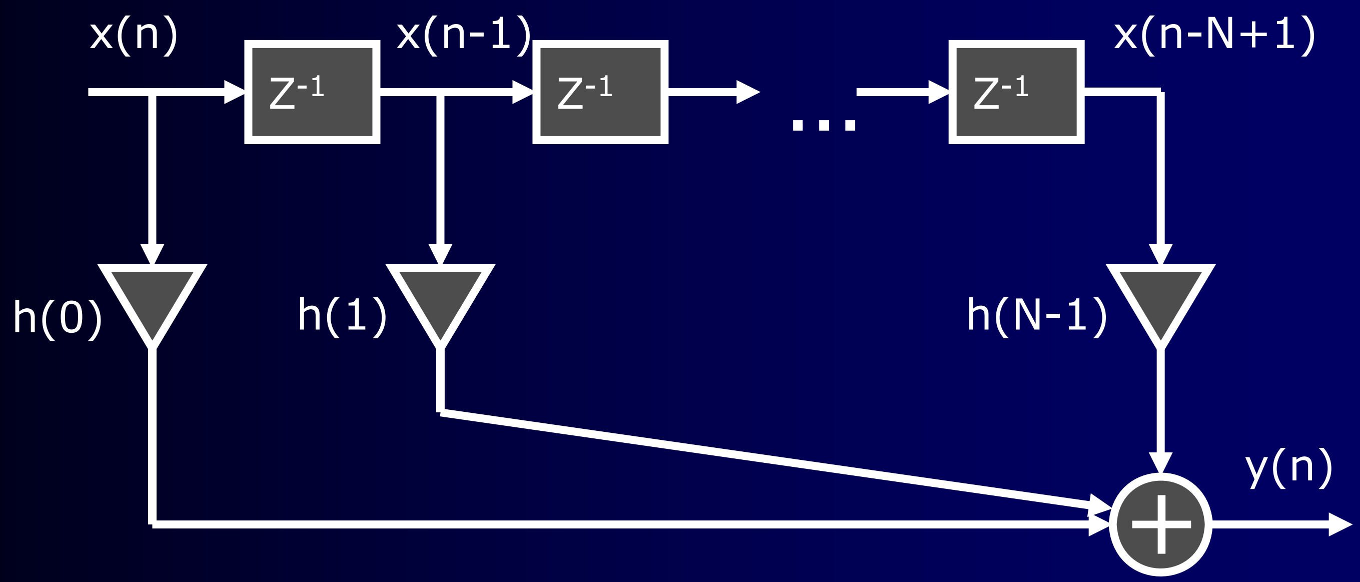
FIRフィルタの構成

- トランスバーサル型の構成



Realization of FIR Filter

- Transversal Type



プログラミング

- N次FIRフィルタ

```
for (k=0; k<L; k++) {
    sum = 0;
   for (n=0; n<N; n++) {
      sum=sum+h(n)x(k-n);
   }
   y[k] =sum;
}
```

Programming

- N-th order FIR Filter

```
for (k=0; k<L; k++) {
   sum = 0;
  for (n=0; n<N; n++) {
    sum=sum+h(n)x(k-n);
  }
  y[k] =sum;
}
```

周波数特性

- 周波数応答は、$h(n)$の離散フーリエ変換で表される

$$H(\omega) = \sum_{n=0}^{N-1} h(n) \exp(-jn\omega)$$

ただし、$H(\omega)$は以下のように周期関数である

$$H(\omega) = H(\omega + 2m\pi) \qquad (m = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$$

パワースペクトル

$$|H(\omega)|^2 = \left| \sum_{n=0}^{N-1} h(n) \exp(-jn\omega) \right|^2$$

Frequency Characteristics

- Frequency Response can be written by Discrete Fourier Transform of $h(n)$

$$H(\omega) = \sum_{n=0}^{N-1} h(n) \exp(-jn\omega)$$

Where, $H(\omega)$ is a periodic function.

$$H(\omega) = H(\omega + 2m\pi) \qquad (m = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$$

Power spectrum

$$\left| H(\omega) \right|^2 = \left| \sum_{n=0}^{N-1} h(n) \exp(-jn\omega) \right|^2$$

IIRフィルタ

- IIR(Infinite Impulse Response):無限インパルス応答
- インパルス応答の値 $h(n)$ が $n<0$ で 0 であり、以下の条件を満足する$h(n)$ によって決まる線形システム

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left| h(n) \right| < \infty$$

- IIRフィルタのインパルス応答の z変換（ $z=exp(jw)$, 遅延素子）

$$H(z) = \sum_{n=0}^{\infty} h(n) z^{-n} = \frac{\sum_{k=0}^{m} b_k z^{-k}}{1 + \sum_{k=1}^{n} a_k z^{-k}}$$

IIR Filter

- IIR: Infinite Impulse Response
- linear system having the impulse response $h(n)$ is 0 at $n<0$ and satisfies the next condition

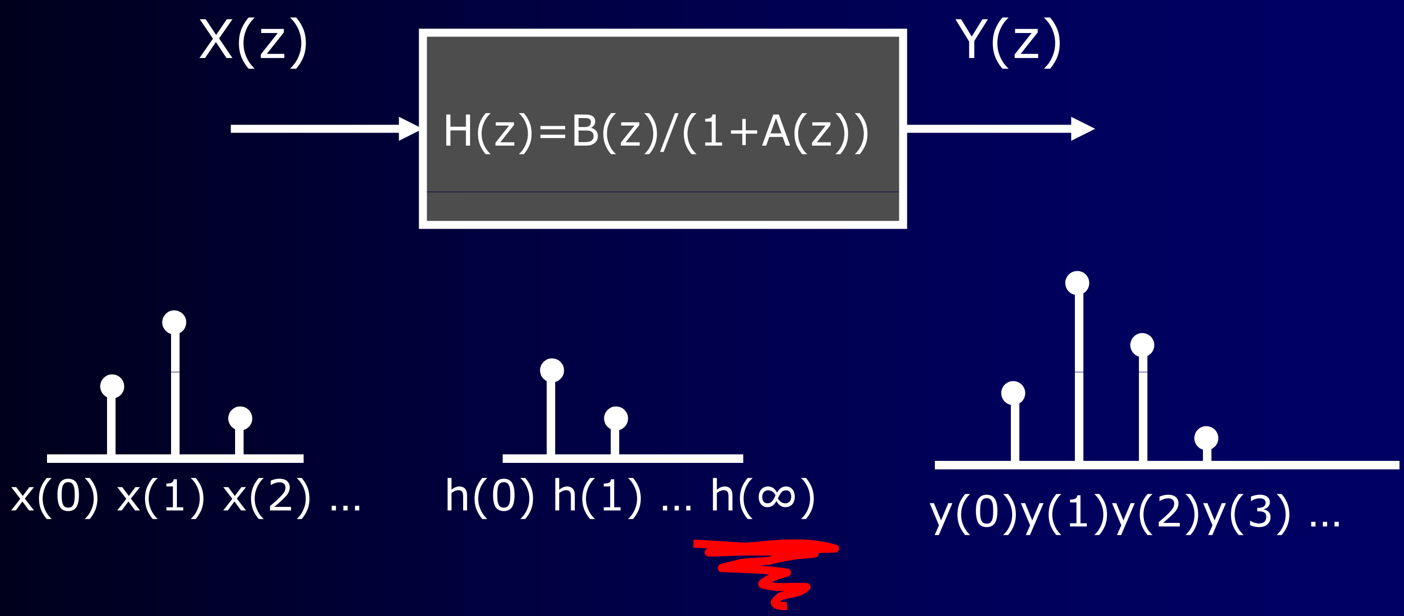
$$\sum_{n=0}^{\infty} |h(n)| < \infty$$

- z transform of IIR filter's impulse response ($z=exp(jw)$, Unit delay)

$$H(z) = \sum_{n=0}^{\infty} h(n) z^{-n} = \frac{\sum_{k=0}^{m} b_k z^{-k}}{1+\sum_{k=1}^{n} a_k z^{-k}}$$

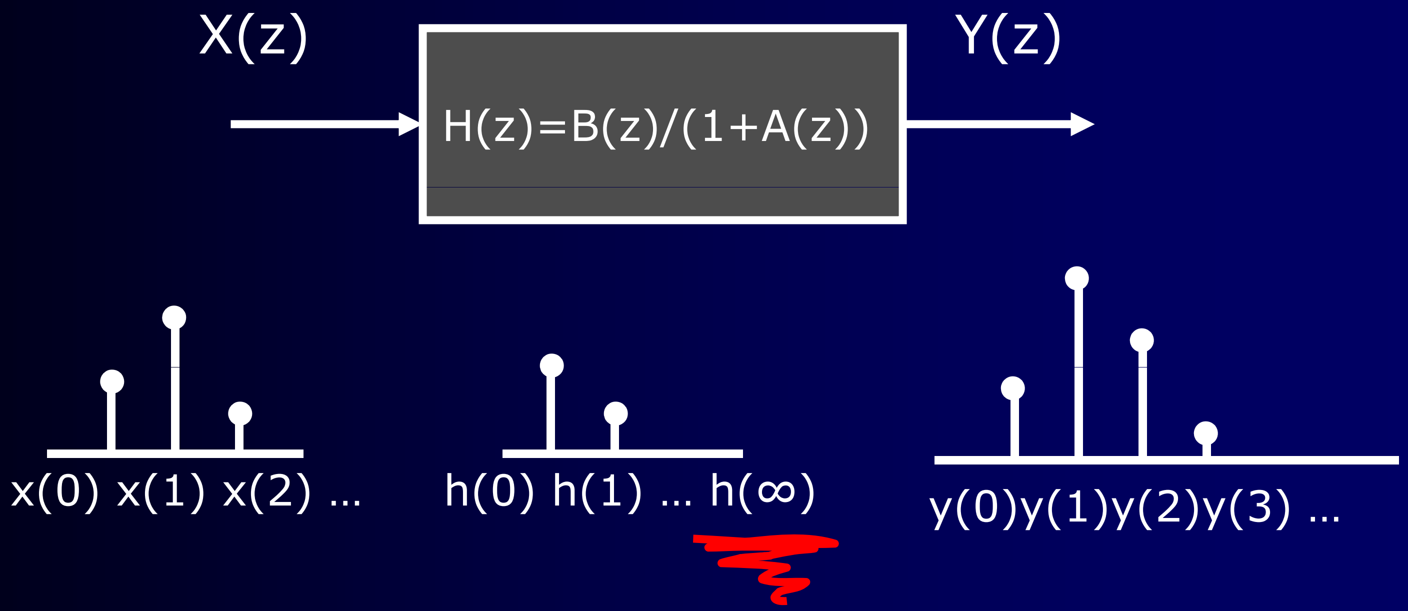
IIRフィルタ (2)

- z-変換によるシステム記述



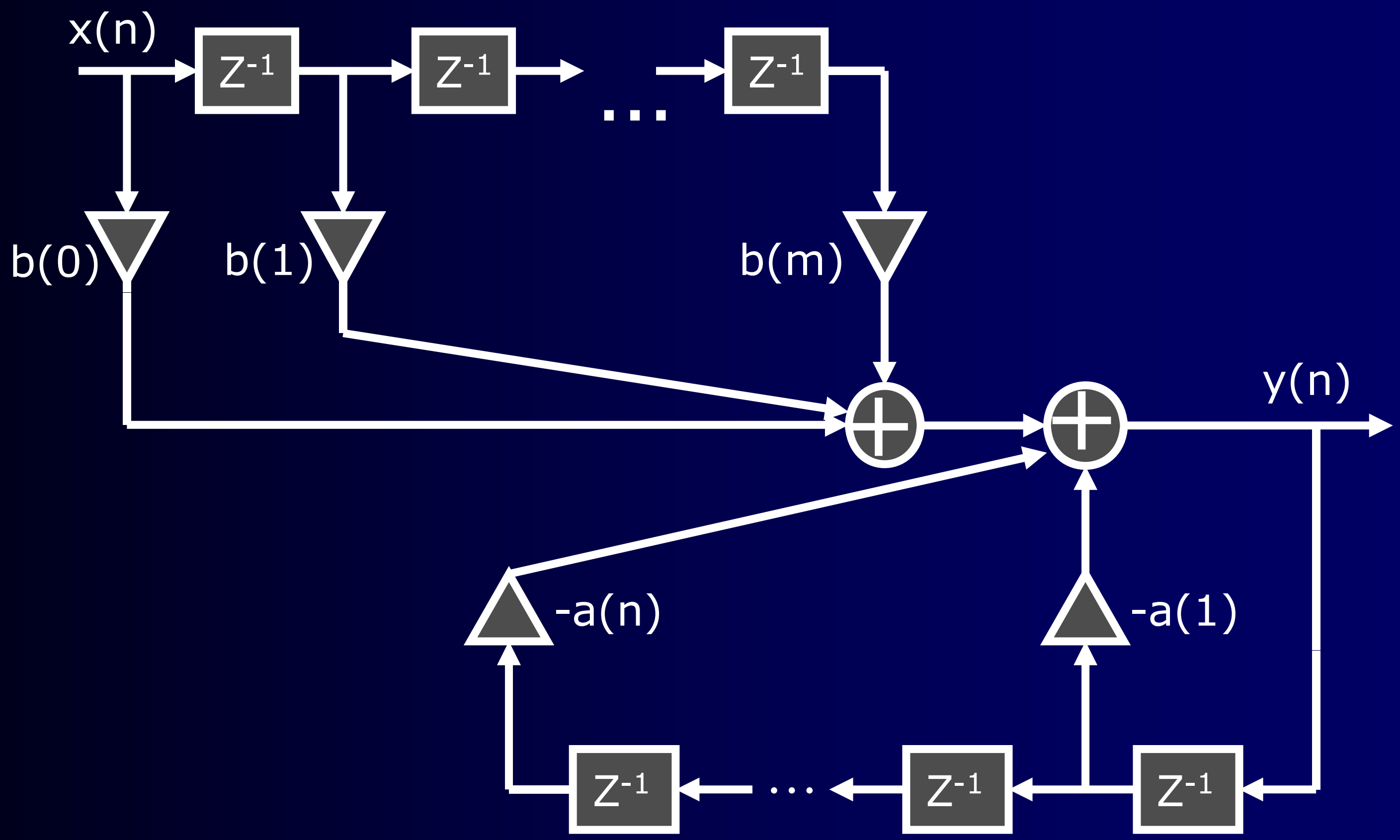
IIR Filter (2)

- System description by z transform



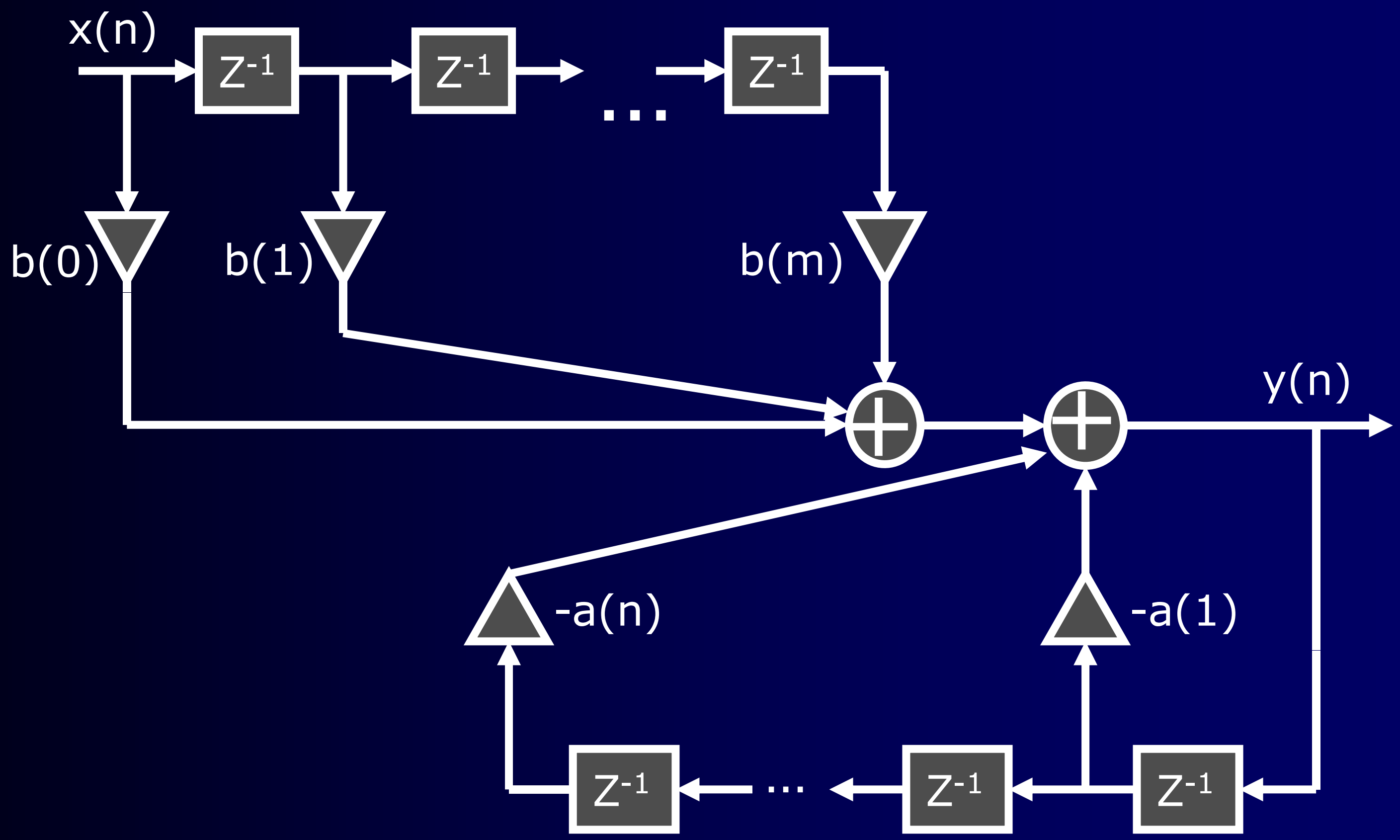
IIRフィルタの構成

- 漸化型IIRフィルタの直接構成



Realization of IIR Filter

- Direct Realization of Recursive IIR Filter



ARフィルタ

- IIRフィルタは一般にARMA (Auto Regressive and Moving Average)フィルタ
- FIRフィルタはMAフィルタ
- ARフィルタはFIR部分を持たない

$$H(z) = \frac{C}{1 + \sum_{k=1}^{n} a_k z^{-k}}$$

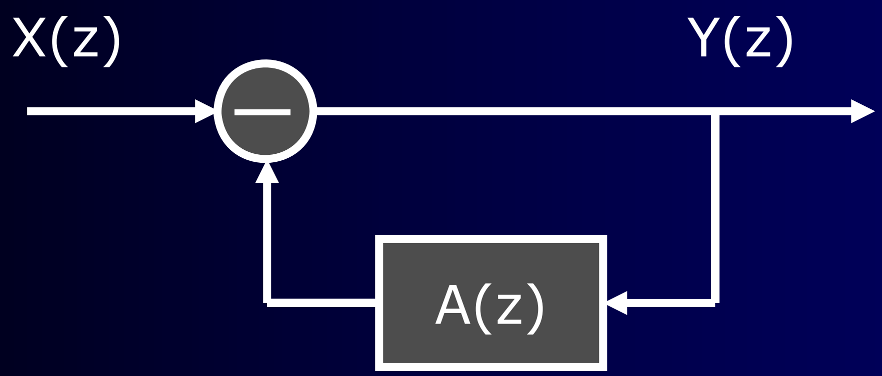
AR Filter

- IIR Filter can be regarded as ARMA (Auto Regressive and Moving Average) Filter in general
- FIR Filter corresponds to MA Filter
- AR Filter does not have FIR Filter

$$H(z) = \frac{C}{1 + \sum_{k=1}^{n} a_k z^{-k}}$$

ARフィルタ (2)

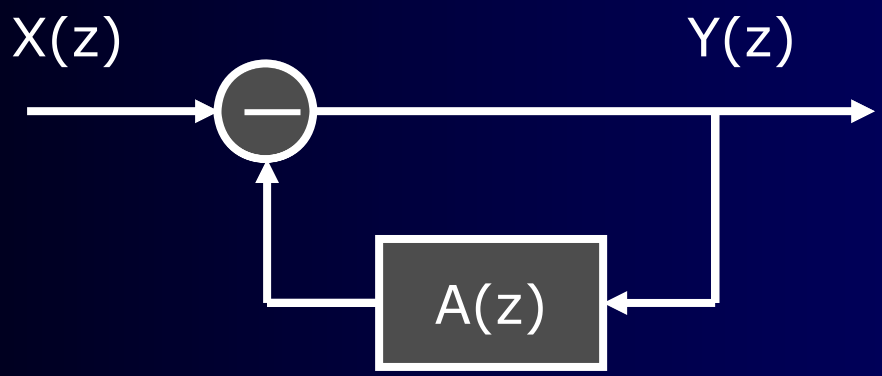
- z変換によるシステム記述



$$Y(z) = \frac{1}{1 + A(z)} X(z)$$

AR Filter (2)

- System description by z transform



$$Y(z) = \frac{1}{1 + A(z)} X(z)$$

1次ARモデル

- z変換による伝達関数から時間応答への計算

$$Y(z)=\frac{1}{1-\alpha z^{-1}}X(z)$$

は次のように書ける

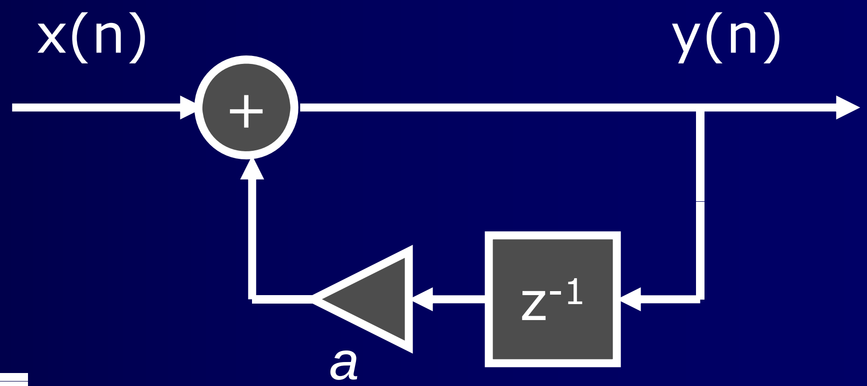
$$(1-\alpha z^{-1})Y(z)=X(z)$$

これを時間領域に書き直すと

$$y(n)-\alpha y(n-1)=x(n)$$

となり、以下の式を得る

$$y(n)=\alpha y(n-1)+x(n)$$



1^{st} order AR Model

- Time series representation from z transform

$$Y(z)=\frac{1}{1-\alpha z^{-1}}X(z)$$

can be written as

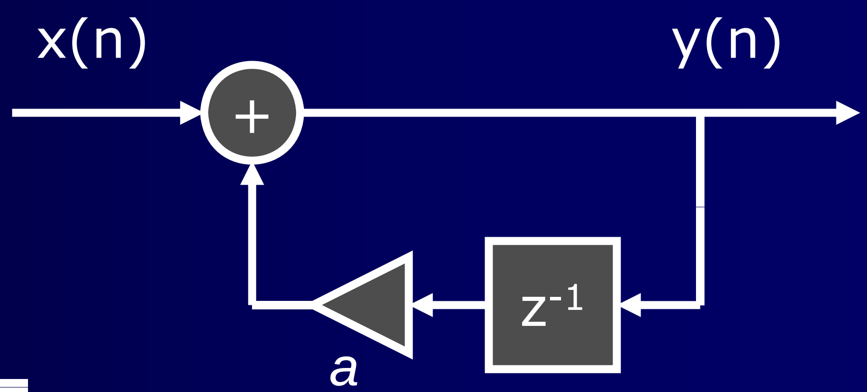
$$(1-\alpha z^{-1})Y(z)=X(z)$$

rewrite to time domain

$$y(n)-\alpha y(n-1)=x(n)$$

Thus, we have

$$y(n)=\alpha y(n-1)+x(n)$$



プログラミング

- 1次 ARモデル

```
for (k =0; k<L; k++) {
  y[k] = a*y[k-1] + x(k);
}
```

- n次ARモデル

```
for (k=0; k<L; k++) {
   sum = 0;
   for (n=1, n<N; n++) {
   sum = sum+ a[n]*y[k-n];
   }
y[k] = sum + x[k];
}
```

Programming

- 1st order AR model

```
for (k =0; k<L; k++) {
  y[k] = a*y[k-1] + x(k);
}
```

- n-th order AR model

```
for (k=0; k<L; k++) {
   sum = 0;
   for (n=1, n<N; n++) {
   sum = sum+ a[n]*y[k-n];
   }
y[k] = sum + x[k];
}
```

問題

- $H(z)=1/(1-0.9z^{-1})$であるIIRフィルタの周波数特性の計算

Quiz

- Obtain the power spectrum of IIR Filter that has the transfer function $H(z)=1/(1-0.9z^{-1})$

サンプリングフィルタ

- 入力信号の周波数帯域を f_m に制限したとき，$1/(2f_m)$ の間隔でサンプリングを行う（サンプリング定理）
- サンプリングを $1/N$ に間引くとき，サンプリング定理を満たすためには（折り返し歪（エリアジングノイズ）を含まないようにするためには），通過周波数帯域を f_m/N に設定する必要が生じる
- 係数は分母と分子が整数なる分数で表すと，ディジタル信号処理には都合が良い（特に2のべき乗の分母）

Sampling Filter

- Sampling period is $1/(2f_m)$ when the frequency range of an input signal is limited to f_m (Sampling Theorem)
- When sub-sampling $1/N$ is performed, the pass-band should be set to f_m/N to satisfy Sampling Theorem (to avoid aliasing noise generation)
- It is preferred to set the denominator and numerator of coefficients integer value for digital signal processing (especially denominator should be 2^n)

直線位相フィルタ

- フィルタの周波数応答を

$$H(\omega) = \pm \left| H(\omega) \right| e^{j\theta(\omega)}$$

と表したとき，指数項が

$$\theta(\omega) = -\alpha\omega$$

であれば直線位相のフィルタと呼ばれ，次式を満足する

$$\alpha = (N-1)/2$$

$$h(n) = h(N-1-n) \qquad (0 \le n \le N-1)$$

Linear Phase Filter

- Filter's response can be written as

$$H(\omega) = \pm \left| H(\omega) \right| e^{j\theta(\omega)}$$

If the exponential part has the next relation

$$\theta(\omega) = -\alpha\omega$$

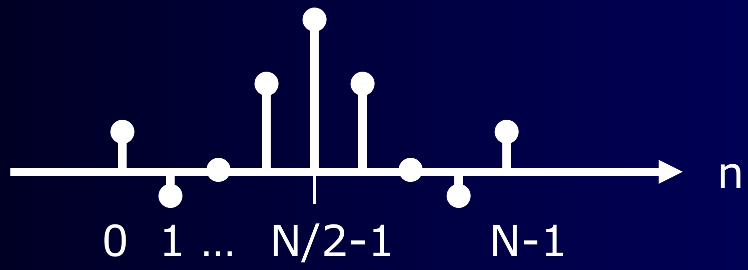
It is called linear phase filter, and it satisfies

$$\alpha = (N-1)/2$$

$$h(n) = h(N-1-n) \qquad (0 \le n \le N-1)$$

直線位相フィルタ (2)

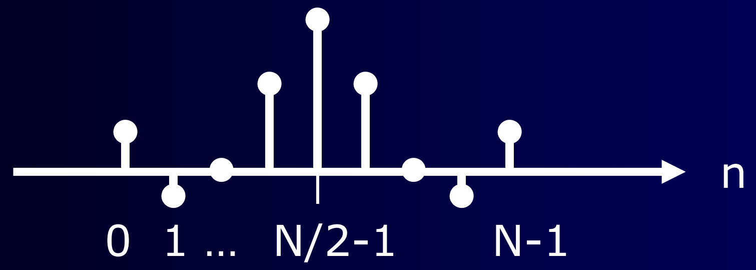
- 直線位相フィルタのインパルス応答は対称



- 画像処理に好都合：画像の両端にはデータが存在しないため，データの対称性を仮定して直線位相のフィルタの係数を適用

Linear Phase Filter (2)

- Impulse response of linear phase filter is symmetric



- Good for Image Processing: At the edges of an image, data are missing for FIR filtering so that symmetric property is presumed and linear phase filter is applied

サブサンプリングフィルタ

■ 2:1サブサンプル用7次FIRフィルタの例

係数 ＼ 分母		32
h(0)	0.5000000	16
h(1),h(-1)	0.2865796	9
h(2),h(-2)	0.0000000	0
h(3),h(-3)	-0.0318142	-1

Sub-sampling Filter

- Example of 2:1 sub-sampling filter

Coef \ Denom		32
h(0)	0.5000000	16
h(1),h(-1)	0.2865796	9
h(2),h(-2)	0.0000000	0
h(3),h(-3)	-0.0318142	-1