

信号理論

- No.4 フィルタリング -

渡辺 裕

信号理論 / Signal Theory

1

Signal Theory

- No.4 Filtering -

Hiroshi Watanabe

信号理論 / Signal Theory

2

FIRフィルタ

- FIR(Finite Impulse Response):有限インパルス応答
- インパルス応答の値 $h(n)$ が $n < 0$ で 0 であり、 $n=0, \dots, N-1$ までの有限の値で定義されるとき、 $h(n)$ によって決まる線形システム
- FIRフィルタのインパルス応答の z変換 ($z=e^{j\omega}$, 遅延素子)

$$H(z) = \sum_{n=0}^{N-1} h(n)z^{-n}$$

信号理論 / Signal Theory

3

FIR Filter

- FIR: Finite Impulse Response
- FIR filter is a linear system that has the impulse response $h(n)$, which is 0 at $n < 0$ and defined in the finite range $n=0, \dots, N-1$
- z transform of an FIR filter's impulse response can be given by ($z=e^{j\omega}$, unit delay)

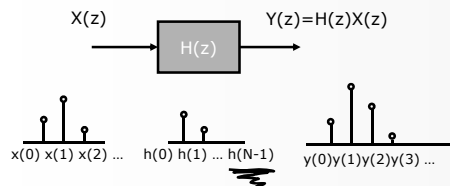
$$H(z) = \sum_{n=0}^{N-1} h(n)z^{-n}$$

信号理論 / Signal Theory

4

FIRフィルタ (2)

- z-変換による離散時間線形システムの記述

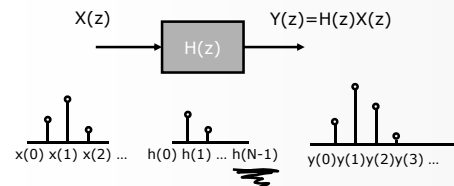


信号理論 / Signal Theory

5

FIR Filter (2)

- Description of the discrete linear system by z transform



信号理論 / Signal Theory

6

FIRフィルタ (3)

- 入出力系列およびフィルタのインパルス応答はz変換で表される

$$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x(n)z^{-n}$$

$$H(z) = \sum_{n=0}^{N-1} h(n)z^{-n}$$

$$Y(z) = \sum_{n=0}^{\infty} y(n)z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{\infty} h(n-k)x(k) \right) z^{-n}$$

信号理論 / Signal Theory

7

FIR Filter (3)

- In and output sequence and filter's impulse response can be written by z transform

$$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x(n)z^{-n}$$

$$H(z) = \sum_{n=0}^{N-1} h(n)z^{-n}$$

$$Y(z) = \sum_{n=0}^{\infty} y(n)z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{\infty} h(n-k)x(k) \right) z^{-n}$$

信号理論 / Signal Theory

8

畳み込み

- デジタルフィルタ: 離散時間線形システム
- 入力に対して出力を観測
- 入出力関係をインパルス応答によって表す

$$y(n) = x(n) * h(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(n-k)x(k)$$

信号理論 / Signal Theory

9

Convolution

- Digital Filter: Discrete linear system
- Output caused by the input is observed
- Impulse response shows input-output relation

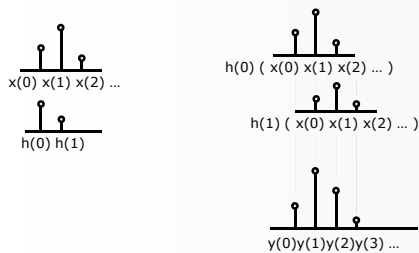
$$y(n) = x(n) * h(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(n-k)x(k)$$

信号理論 / Signal Theory

10

畳み込み (2)

- 時刻 $n < 0$ で信号が 0 と仮定したときの畳み込み

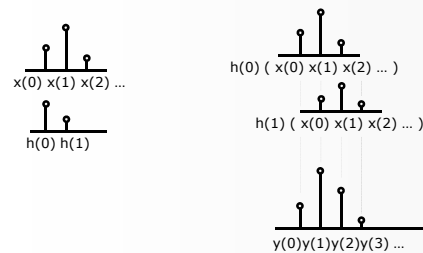


信号理論 / Signal Theory

11

Convolution (2)

- Convolution when signal is 0 at time $n < 0$

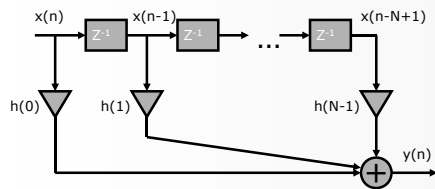


信号理論 / Signal Theory

12

FIRフィルタの構成

■ トランスバーサル型の構成

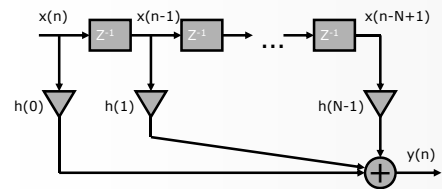


信号理論 / Signal Theory

13

Realization of FIR Filter

■ Transversal Type



信号理論 / Signal Theory

14

プログラミング

■ N次FIRフィルタ

```
for (k=0; k<L; k++) {
    sum = 0;
    for (n=0; n<N; n++) {
        sum=sum+h(n)x(k-n);
    }
    y[k] =sum;
}
```

信号理論 / Signal Theory

15

Programming

■ N-th order FIR Filter

```
for (k=0; k<L; k++) {
    sum = 0;
    for (n=0; n<N; n++) {
        sum=sum+h(n)x(k-n);
    }
    y[k] =sum;
}
```

信号理論 / Signal Theory

16

周波数特性

■ 周波数応答は、 $h(n)$ の離散フーリエ変換で表される

$$H(\omega) = \sum_{n=0}^{N-1} h(n) \exp(-jn\omega)$$

ただし、 $H(\omega)$ は以下のように周期関数である

$$H(\omega) = H(\omega + 2m\pi) \quad (m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

パワースペクトル

$$|H(\omega)|^2 = \left| \sum_{n=0}^{N-1} h(n) \exp(-jn\omega) \right|^2$$

信号理論 / Signal Theory

17

Frequency Characteristics

■ Frequency Response can be written by Discrete Fourier Transform of $h(n)$

$$H(\omega) = \sum_{n=0}^{N-1} h(n) \exp(-jn\omega)$$

Where, $H(\omega)$ is a periodic function.

$$H(\omega) = H(\omega + 2m\pi) \quad (m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

Power spectrum

$$|H(\omega)|^2 = \left| \sum_{n=0}^{N-1} h(n) \exp(-jn\omega) \right|^2$$

信号理論 / Signal Theory

18

IIRフィルタ

- IIR(Infinite Impulse Response):無限インパルス応答
- インパルス応答の値 $h(n)$ が $n < 0$ で 0 であり、以下の条件を満たす $h(n)$ によって決まる線形システム

$$\sum_{n=0}^{\infty} |h(n)| < \infty$$

- IIRフィルタのインパルス応答の z 変換 ($z = \exp(j\omega)$, 遅延素子)

$$H(z) = \sum_{n=0}^{\infty} h(n)z^{-n} = \frac{\sum_{k=0}^m b_k z^{-k}}{1 + \sum_{k=1}^n a_k z^{-k}}$$

信号理論 / Signal Theory

19

IIR Filter

- IIR: Infinite Impulse Response
- linear system having the impulse response $h(n)$ is 0 at $n < 0$ and satisfies the next condition

$$\sum_{n=0}^{\infty} |h(n)| < \infty$$

- z transform of IIR filter's impulse response ($z = \exp(j\omega)$, Unit delay)

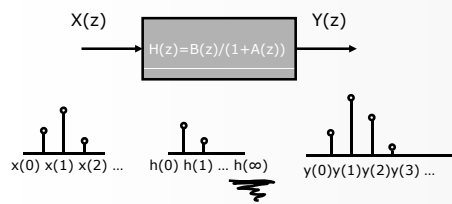
$$H(z) = \sum_{n=0}^{\infty} h(n)z^{-n} = \frac{\sum_{k=0}^m b_k z^{-k}}{1 + \sum_{k=1}^n a_k z^{-k}}$$

信号理論 / Signal Theory

20

IIRフィルタ (2)

- z -変換によるシステム記述

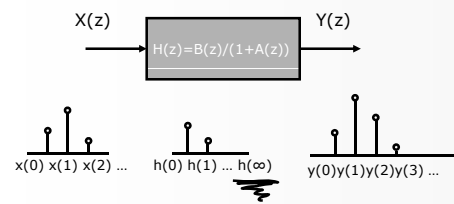


信号理論 / Signal Theory

21

IIR Filter (2)

- System description by z transform

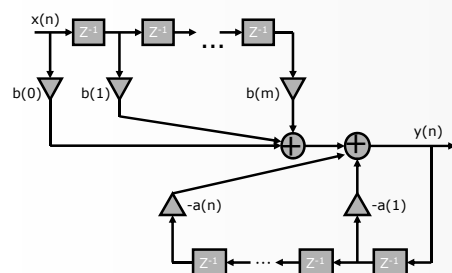


信号理論 / Signal Theory

22

IIRフィルタの構成

- 漸化型IIRフィルタの直接構成

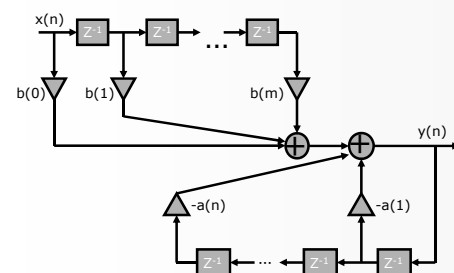


信号理論 / Signal Theory

23

Realization of IIR Filter

- Direct Realization of Recursive IIR Filter



信号理論 / Signal Theory

24

ARフィルタ

- IIRフィルタは一般にARMA (Auto Regressive and Moving Average)フィルタ
- FIRフィルタはMAフィルタ
- ARフィルタはFIR部分を持たない

$$H(z) = \frac{C}{1 + \sum_{k=1}^n a_k z^{-k}}$$

信号理論 / Signal Theory

25

AR Filter

- IIR Filter can be regarded as ARMA (Auto Regressive and Moving Average) Filter in general
- FIR Filter corresponds to MA Filter
- AR Filter does not have FIR Filter

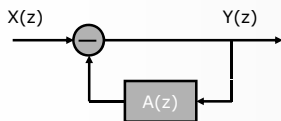
$$H(z) = \frac{C}{1 + \sum_{k=1}^n a_k z^{-k}}$$

信号理論 / Signal Theory

26

ARフィルタ (2)

- z変換によるシステム記述



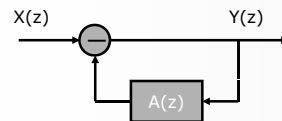
$$Y(z) = \frac{1}{1 + A(z)} X(z)$$

信号理論 / Signal Theory

27

AR Filter (2)

- System description by z transform



$$Y(z) = \frac{1}{1 + A(z)} X(z)$$

信号理論 / Signal Theory

28

1次ARモデル

- z変換による伝達関数から時間応答への計算

$$Y(z) = \frac{1}{1 - \alpha z^{-1}} X(z)$$

は次のように書ける

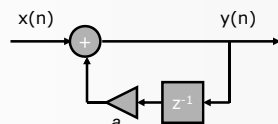
$$(1 - \alpha z^{-1})Y(z) = X(z)$$

これを時間領域に書き直すと

$$y(n) - \alpha y(n-1) = x(n)$$

となり、以下の式を得る

$$y(n) = \alpha y(n-1) + x(n)$$



信号理論 / Signal Theory

29

1st order AR Model

- Time series representation from z transform

$$Y(z) = \frac{1}{1 - \alpha z^{-1}} X(z)$$

can be written as

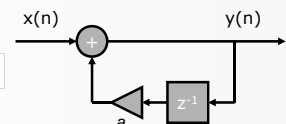
$$(1 - \alpha z^{-1})Y(z) = X(z)$$

rewrite to time domain

$$y(n) - \alpha y(n-1) = x(n)$$

Thus, we have

$$y(n) = \alpha y(n-1) + x(n)$$



信号理論 / Signal Theory

30

プログラミング

- 1次 ARモデル
for (k = 0; k < L; k++) {
 y[k] = a*y[k-1] + x(k);
}
- n次ARモデル
for (k=0; k<L; k++) {
 sum = 0;
 for (n=1, n<N; n++) {
 sum = sum+ a[n]*y[k-n];
 }
 y[k] = sum + x[k];
}

信号理論 / Signal Theory

31

Programming

- 1st order AR model
for (k = 0; k < L; k++) {
 y[k] = a*y[k-1] + x(k);
}
- n-th order AR model
for (k=0; k<L; k++) {
 sum = 0;
 for (n=1, n<N; n++) {
 sum = sum+ a[n]*y[k-n];
 }
 y[k] = sum + x[k];
}

信号理論 / Signal Theory

32

問題

- $H(z)=1/(1-0.9z^{-1})$ であるIIRフィルタの周波数特性の計算

信号理論 / Signal Theory

33

Quiz

- Obtain the power spectrum of IIR Filter that has the transfer function $H(z)=1/(1-0.9z^{-1})$

信号理論 / Signal Theory

34

サンプリングフィルタ

- 入力信号の周波数帯域を f_m に制限したとき, $1/(2f_m)$ の間隔でサンプリングを行う(サンプリング定理)
- サンプリングを $1/N$ に間引くとき, サンプリング定理を満たすためには(折り返し歪(エイリアジングノイズ)を含まないようにするためには), 通過周波数帯域を f_m/N に設定する必要があるが生じる
- 係数は分母と分子が整数なる分数で表すと, デジタル信号処理には都合が良い(特に2のべき乗の分母)

信号理論 / Signal Theory

35

Sampling Filter

- Sampling period is $1/(2f_m)$ when the frequency range of an input signal is limited to f_m (Sampling Theorem)
- When sub-sampling $1/N$ is performed, the pass-band should be set to f_m/N to satisfy Sampling Theorem (to avoid aliasing noise generation)
- It is preferred to set the denominator and numerator of coefficients integer value for digital signal processing (especially denominator should be 2^n)

信号理論 / Signal Theory

36

直線位相フィルタ

- フィルタの周波数応答を

$$H(\omega) = \pm |H(\omega)| e^{j\theta(\omega)}$$

と表したとき、指数項が

$$\theta(\omega) = -\alpha\omega$$

であれば直線位相のフィルタと呼ばれ、次式を満足する

$$\alpha = (N-1)/2$$

$$h(n) = h(N-1-n) \quad (0 \leq n \leq N-1)$$

信号理論 / Signal Theory

37

Linear Phase Filter

- Filter's response can be written as

$$H(\omega) = \pm |H(\omega)| e^{j\theta(\omega)}$$

If the exponential part has the next relation

$$\theta(\omega) = -\alpha\omega$$

It is called linear phase filter, and it satisfies

$$\alpha = (N-1)/2$$

$$h(n) = h(N-1-n) \quad (0 \leq n \leq N-1)$$

信号理論 / Signal Theory

38

直線位相フィルタ (2)

- 直線位相フィルタのインパルス応答は対称



- 画像処理に好都合: 画像の両端にはデータが存在しないため、データの対称性を仮定して直線位相のフィルタの係数を適用



信号理論 / Signal Theory

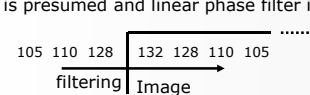
39

Linear Phase Filter (2)

- Impulse response of linear phase filter is symmetric



- Good for Image Processing: At the edges of an image, data are missing for FIR filtering so that symmetric property is presumed and linear phase filter is applied



信号理論 / Signal Theory

40

サブサンプリングフィルタ

- 2:1サブサンプル用7次FIRフィルタの例

係数	分母	32
$h(0)$	0.5000000	16
$h(1), h(-1)$	0.2865796	9
$h(2), h(-2)$	0.0000000	0
$h(3), h(-3)$	-0.0318142	-1

信号理論 / Signal Theory

41

Sub-sampling Filter

- Example of 2:1 sub-sampling filter

Coef	Denom	32
$h(0)$	0.5000000	16
$h(1), h(-1)$	0.2865796	9
$h(2), h(-2)$	0.0000000	0
$h(3), h(-3)$	-0.0318142	-1

信号理論 / Signal Theory

42