

信号理論

- No.2 フーリエ変換とスペクトル解析 -

渡辺 裕

Signal Theory

- No.2 Fourier Transform and Spectrum Analysis -

Hiroshi Watanabe

フーリエ級数展開

- 関数 $x(t)$ の変数 t が区間 $[0, T]$ に限られていれば、 $x(t)$ は正規直交関数系によりフーリエ級数展開できる

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n \exp(j2\pi nt / T) \quad (2.1)$$


- ここに、 C_n はフーリエ級数の係数である

$$C_n = \frac{1}{T} \int_0^T x(t) \exp(-j2\pi nt / T) dt \quad (2.2)$$

Fourier Series Expansion

- When variable t of function $x(t)$ is limited to the range $[0, T]$, $x(t)$ can be expanded to Fourier Series since it is an orthonormal function series

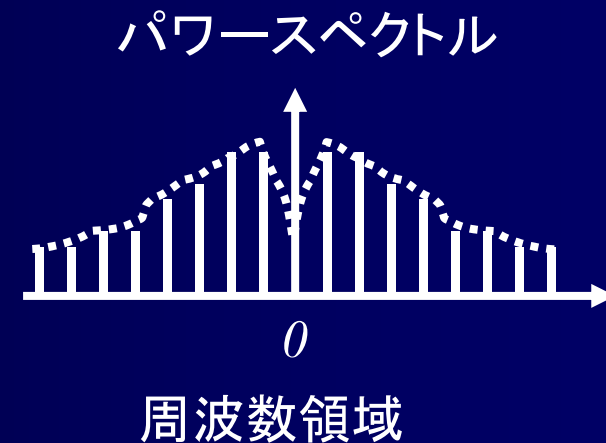
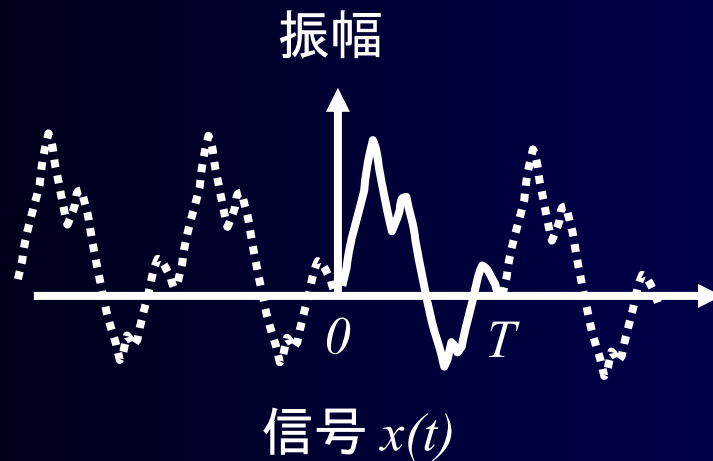
$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n \exp(j2\pi nt / T) \quad (2.1)$$


- Where, C_n is a coefficient of Fourier Series.

$$C_n = \frac{1}{T} \int_0^T x(t) \exp(-j2\pi nt / T) dt \quad (2.2)$$

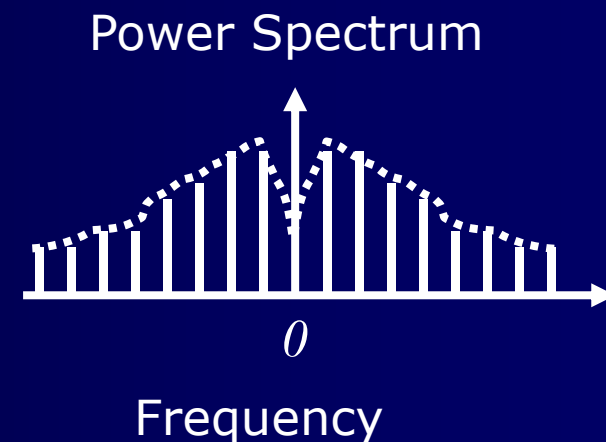
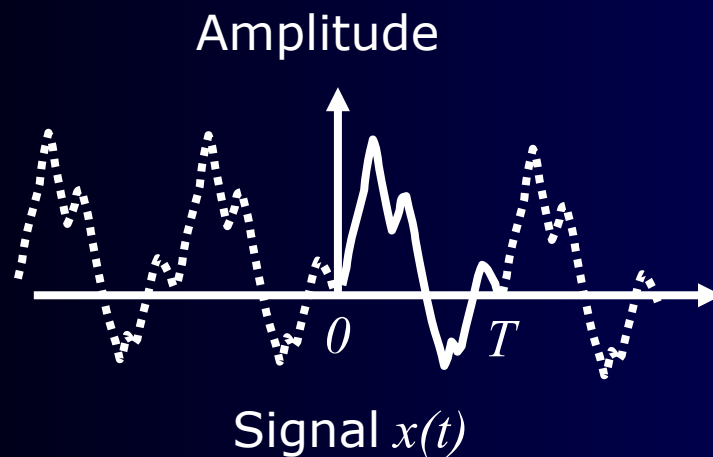
フーリエ級数展開の特徴

- フーリエ級数展開の結果えられる信号は, $[0, T]$ の区間で $x(t)$ に一致するが, その他の範囲では, この区間と同じ信号を繰り返す.
- 周波数成分(級数の係数)は無限個に現れる.



Characteristics of Fourier Series Expansion

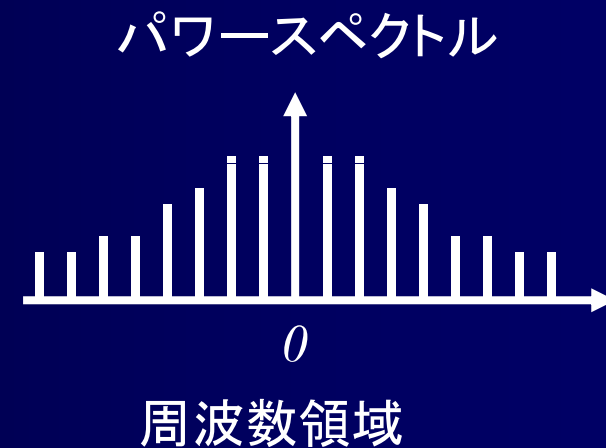
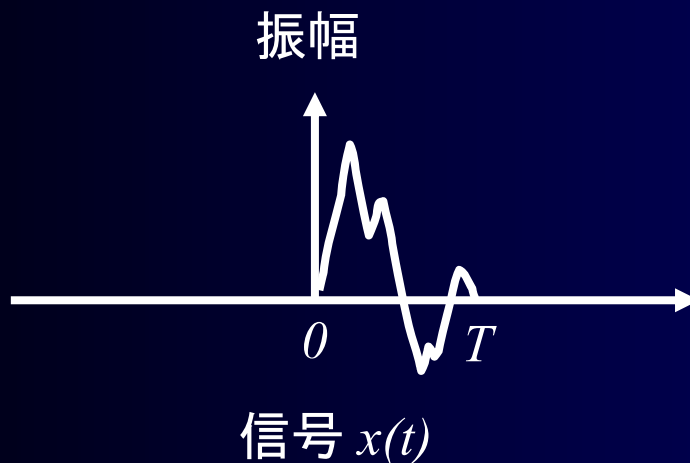
- Signal obtained by Fourier Series Expansion matches to $x(t)$ in the range of $[0, T]$. It repeats the same signal outside of the range.
- The unlimited number of frequency components (Fourier Series coefficient) appears.



フーリエ級数展開の特徴(2)

- パーシバルの定理(エネルギー保存の法則) ... 時間領域で有限のパワーは周波数領域でのパワーの総和に一致する

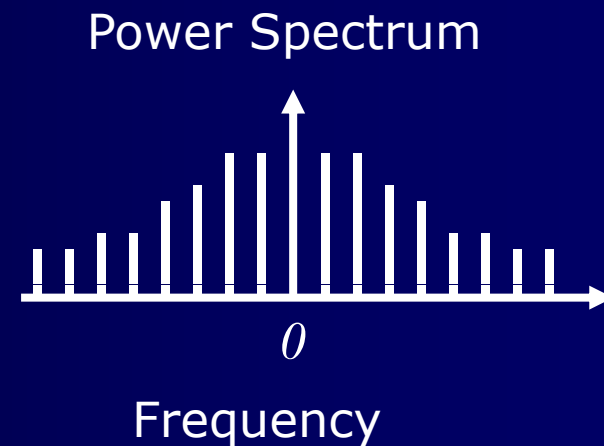
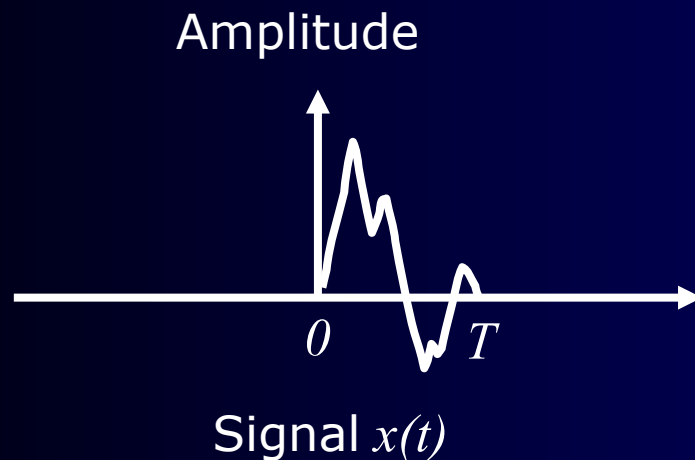
$$\frac{1}{T} \int_0^T x^2(t) dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |C_n|^2$$



Characteristics of Fourier Series Expansion(2)

- Parseval's Theorem (Energy Preserving Theorem) ... Limited power in the time domain corresponds to the total power in the frequency domain.

$$\frac{1}{T} \int_0^T x^2(t) dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |C_n|^2$$



フーリエ級数展開の特徴(3)

■ フーリエ級数展開

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n \exp(j2\pi nt / T)$$

において,

$$C_0 = a_0, \quad C_n = (a_n - jb_n)/2 \quad (n = 1, 2, \dots)$$

と表されれば, パワーおよび位相スペクトルは次式で与えられる

$$|C_n|^2 = (a_n^2 + b_n^2)/4$$
$$\theta_n = \tan^{-1}(b_n / a_n)$$

Characteristics of Fourier Series Expansion(3)

- Let the Fourier Series Expansion be

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n \exp(j2\pi nt / T)$$

Let coefficients be

$$C_0 = a_0, \quad C_n = (a_n - jb_n)/2 \quad (n = 1, 2, \dots)$$

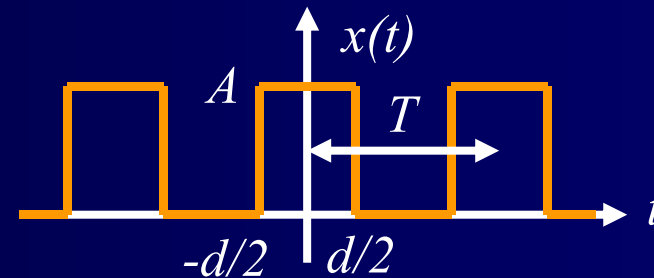
Power Spectrum and Phase can be obtained by

$$|C_n|^2 = (a_n^2 + b_n^2)/4$$
$$\theta_n = \tan^{-1}(b_n / a_n)$$

問題

- 振幅 A , 幅 d なるパルス列 $x(t)$ の複素フーリエ級数展開を求めよ

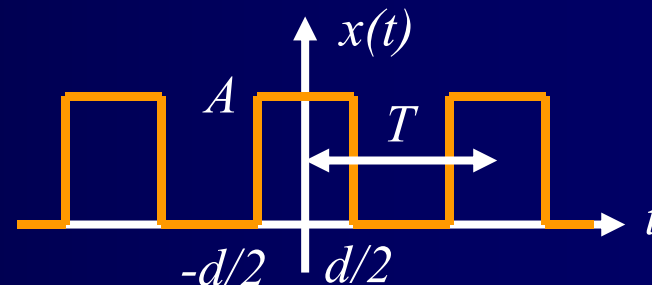
$$\begin{aligned} C_n &= \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} A \exp(-jn\omega t) dt \\ &= \frac{A}{T} \left[\frac{\exp(-jn\omega t)}{-jn\omega} \right]_{-d/2}^{d/2} \\ &= \frac{Ad}{T} \cdot \frac{\sin(n\omega d / 2)}{n\omega d / 2} \\ &\equiv \frac{Ad}{T} \cdot \text{Sinc}(n\omega d / 2) \end{aligned}$$



Quiz

- Obtain Complex Fourier Expansion of the series of impulse signal having amplitude A , and width d

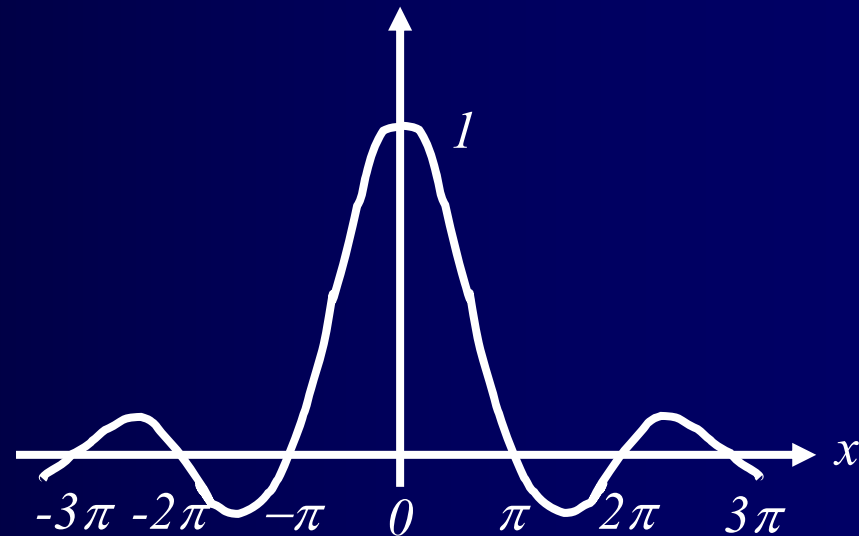
$$\begin{aligned} C_n &= \int_{-T/2}^{T/2} A \exp(-jn\omega t) dt \\ &= \frac{A}{T} \left[\frac{\exp(-jn\omega t)}{-jn\omega} \right]_{-d/2}^{d/2} \\ &= \frac{Ad}{T} \cdot \frac{\sin(n\omega d / 2)}{n\omega d / 2} \\ &\equiv \frac{Ad}{T} \cdot \text{Sinc}(n\omega d / 2) \end{aligned}$$



標本化関数

■ Sinc関数

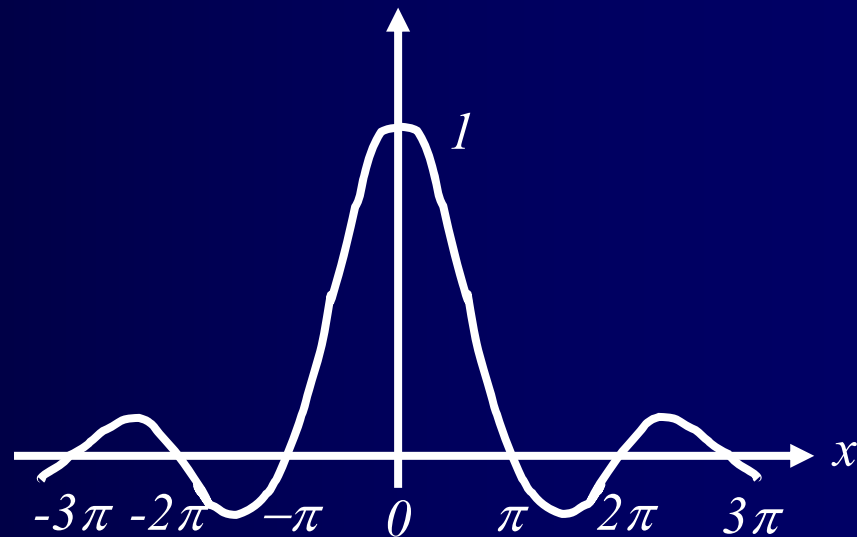
$$\text{Sinc}(x) = \frac{\sin x}{x}$$



Sampling Function

- Sinc Function

$$\text{Sinc}(x) = \frac{\sin x}{x}$$



フーリエ変換

- 式(2.1)(2.2)において $T \rightarrow \infty$ とし, C_n に含まれる $1/T$ を級数に移し, TC_n を X_n と書き直すと

$$X_n = \int_0^T x(t) \exp\left(-j \frac{2n\pi}{T} t\right) dt \quad (2.3)$$

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{T} X_n \exp\left(j \frac{2n\pi}{T} t\right) \quad (2.4)$$

となりさらに

$$\frac{2n\pi}{T} = 2\pi f, \quad \frac{1}{T} = \Delta f \quad (2.5)$$

とにおいて $T \rightarrow \infty$ の極限をとるとフーリエ変換対を得る.

Fourier Transform

- At Eqn.(2.1)(2.2), make $T \rightarrow \infty$, move $1/T$ in C_n to Series, rewrite TC_n to X_n , we have

$$X_n = \int_0^T x(t) \exp\left(-j \frac{2n\pi}{T} t\right) dt \quad (2.3)$$

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{T} X_n \exp\left(j \frac{2n\pi}{T} t\right) \quad (2.4)$$

Then we replace variables as

$$\frac{2n\pi}{T} = 2\pi f, \quad \frac{1}{T} = \Delta f \quad (2.5)$$

Further, we can obtain Fourier Transform Pair by taking $T \rightarrow \infty$

フーリエ変換(2)

- フーリエ変換対(フーリエ変換, フーリエ逆変換)

$$X(f) = F(x) = \int_0^{\infty} x(t) \exp(-j2\pi ft) dt \quad (2.6)$$

$$x(t) = F^{-1}(X) = \int_{-\infty}^{\infty} X(f) \exp(j2\pi ft) df \quad (2.7)$$

- 式(2.1)では区間を $[0, T]$ に制限したが, それを撤廃すると

$$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \exp(-j2\pi ft) dt \quad (2.8)$$

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(f) \exp(j2\pi ft) df \quad (2.9)$$

Fourier Transform(2)

- Fourier Transform Pair

$$X(f) = F(x) = \int_0^{\infty} x(t) \exp(-j2\pi ft) dt \quad (2.6)$$

$$x(t) = F^{-1}(X) = \int_{-\infty}^{\infty} X(f) \exp(j2\pi ft) df \quad (2.7)$$

- At Eq(2.1), we restrict the range to $[0, T]$. Here, by removing this restriction, we have the next pair.

$$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \exp(-j2\pi ft) dt \quad (2.8)$$

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(f) \exp(j2\pi ft) df \quad (2.9)$$

フーリエ変換(3)

- $\omega = 2\pi f$ と書き換えれば, フーリエ変換対は次式で表される

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \exp(-j\omega t) dt$$

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) \exp(j\omega t) d\omega$$

Fourier Transform(3)

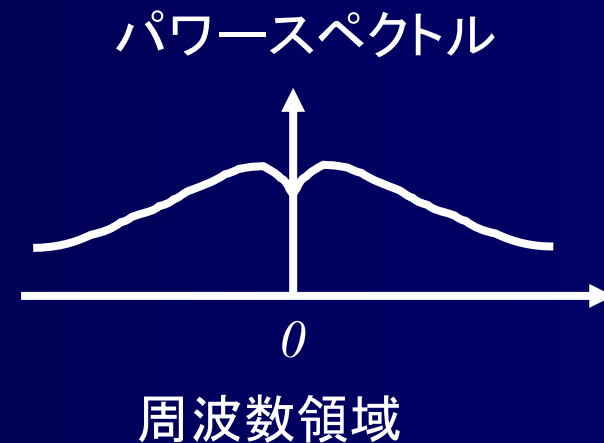
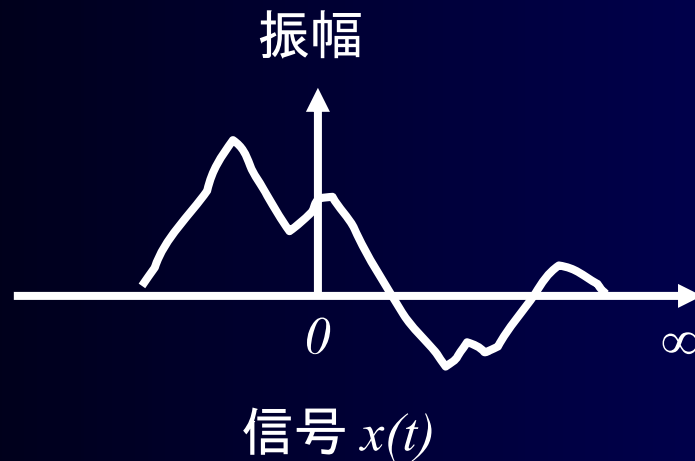
- By replacing $\omega=2\pi f$, we can obtain Fourier Transform Pair.

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \exp(-j\omega t) dt$$

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) \exp(j\omega t) d\omega$$

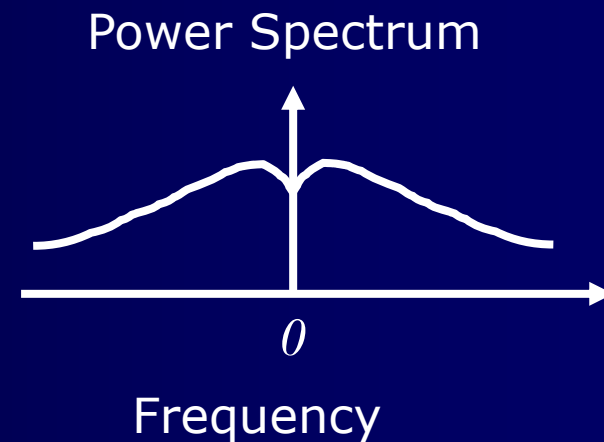
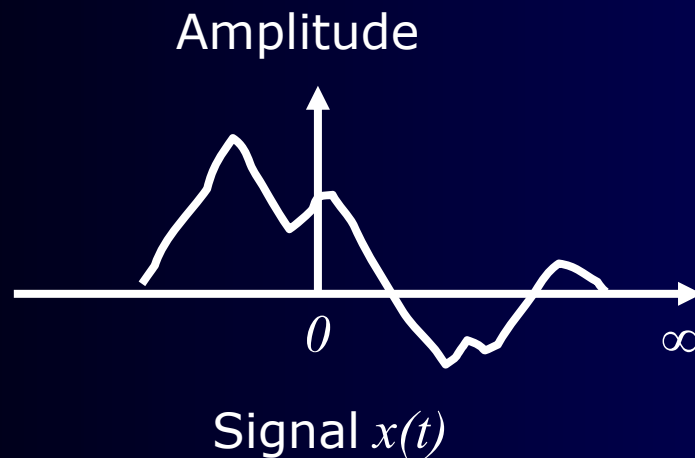
フーリエ変換の特徴

- フーリエ変換の際の入力信号は $x(t)$ は、区間 $[-\infty, \infty]$ で定義され、繰り返し信号ではない。
- フーリエ変換の結果得られるスペクトルは連続スペクトルである。



Characteristics of Fourier Transform

- At Fourier Transform, the input signal $x(t)$ is defined in the range $[-\infty, \infty]$, and not repeated.
- Spectrum obtained by Fourier Transform is continuous.



フーリエ変換の特徴(2)

- 線形性

$$a_1x_1(t) + a_2x_2(t) \Leftrightarrow a_1X_1(\omega) + a_2X_2(\omega)$$

- 対称性

$$Y(t) = x(t) \Leftrightarrow 2\pi y(-\omega) = X(\omega)$$

- 時間軸の伸縮

$$x(at) \Leftrightarrow \frac{1}{|a|} X\left(\frac{\omega}{a}\right)$$

Characteristics of Fourier Transform(2)

- Linearity

$$a_1x_1(t) + a_2x_2(t) \Leftrightarrow a_1X_1(\omega) + a_2X_2(\omega)$$

- Symmetry

$$Y(t) = x(t) \Leftrightarrow 2\pi y(-\omega) = X(\omega)$$

- Time Expansion

$$x(at) \Leftrightarrow \frac{1}{|a|} X\left(\frac{\omega}{a}\right)$$

フーリエ変換の特徴(3)

- 時間軸の推移

$$x(t - t_0) \Leftrightarrow X(\omega) \exp(-jt_0\omega)$$

- 周波数軸の推移

$$\exp(j\omega_0 t) x(t) \Leftrightarrow X(\omega - \omega_0)$$

Characteristic of Fourier Transform(3)

- Time Axis Shifting

$$x(t - t_0) \Leftrightarrow X(\omega) \exp(-jt_0\omega)$$

- Frequency Axis Shifting

$$\exp(j\omega_0 t) x(t) \Leftrightarrow X(\omega - \omega_0)$$

問題

- $x(t)$ のフーリエ変換が $X(\omega)$ であるとき, $x(t-t_0)$ のフーリエ変換が $X(\omega)\exp(-j\omega t_0)$ であることを証明せよ

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} x(t-t_0) \exp(-j\omega t) dt &= \int_{-\infty}^{\infty} x(s) \exp(-j\omega(s+t_0)) ds \\ &= \exp(-j\omega t_0) \int_{-\infty}^{\infty} x(s) \exp(-j\omega s) ds \\ &= \exp(-j\omega t_0) X(\omega)\end{aligned}$$

変数変換

$$s = t - t_0$$

Quiz

- When Fourier Transform of $x(t)$ is $X(\omega)$, Prove that the Fourier Transform of $x(t-t_0)$ becomes $X(\omega)\exp(-jt_0\omega)$.

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} x(t-t_0) \exp(-j\omega t) dt &= \int_{-\infty}^{\infty} x(s) \exp(-j\omega(s+t_0)) ds \\ &= \exp(-j\omega t_0) \int_{-\infty}^{\infty} x(s) \exp(-j\omega s) ds \\ &= \exp(-j\omega t_0) X(\omega)\end{aligned}$$

Change Variable

$$s = t - t_0$$

問題

- $x(t)$ のフーリエ変換が $X(\omega)$ であるとき, $\exp(j\omega_0 t)x(t)$ のフーリエ変換が $X(\omega - \omega_0)$ であることを証明せよ

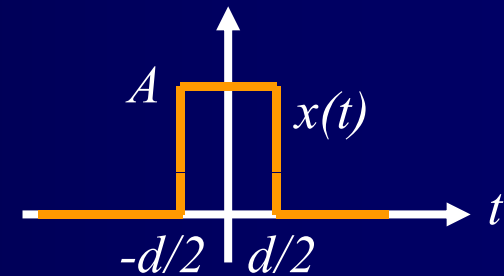
Quiz

- When Fourier Transform of $x(t)$ is $X(\omega)$, Prove that the Fourier Transform of $\exp(j\omega_0 t)x(t)$ becomes $X(\omega - \omega_0)$.

問題

- 振幅 A , 幅 d なる孤立パルス $x(t)$ のフーリエ変換を求めよ

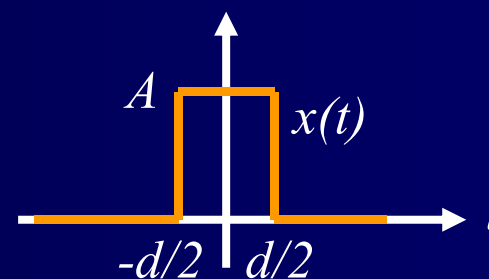
$$\begin{aligned} X(\omega) &= \int_{-d/2}^{d/2} A \exp(-j\omega t) dt \\ &= A \left[\frac{\exp(-j\omega t)}{-j\omega} \right]_{-d/2}^{d/2} \\ &= Ad \frac{\sin(\omega d / 2)}{\omega d / 2} \end{aligned}$$



Quiz

- Obtain Fourier Transform of the isolated impulse $x(t)$ having an amplitude A , and width d .

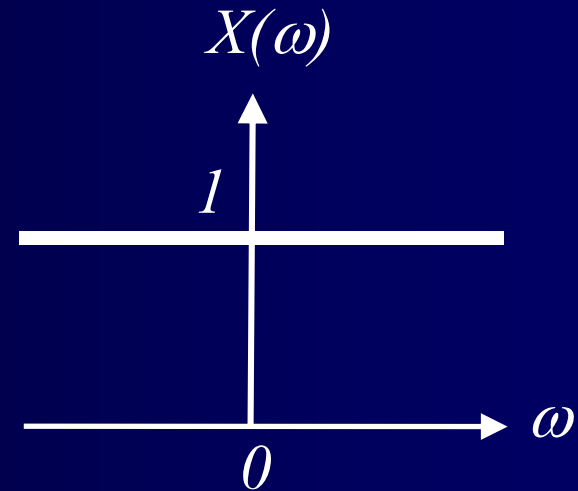
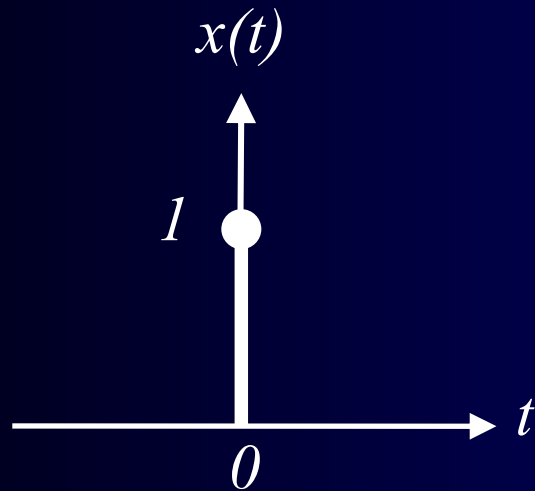
$$\begin{aligned} X(\omega) &= \int_{-d/2}^{d/2} A \exp(-j\omega t) dt \\ &= A \left[\frac{\exp(-j\omega t)}{-j\omega} \right]_{-d/2}^{d/2} \\ &= Ad \frac{\sin(\omega d / 2)}{\omega d / 2} \end{aligned}$$



デルタ関数のフーリエ変換

- デルタ関数 $\delta(t)$ をフーリエ変換すると1になる

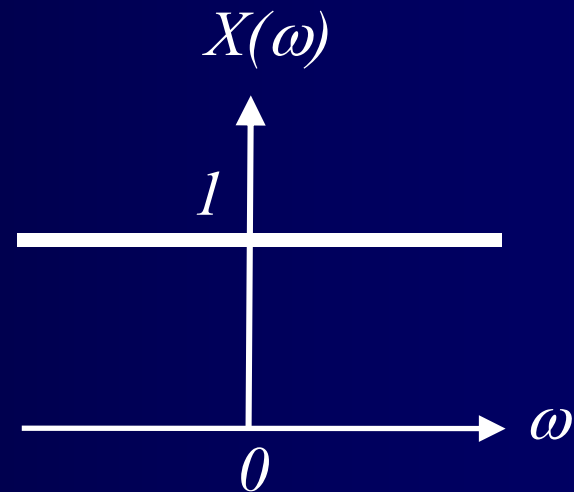
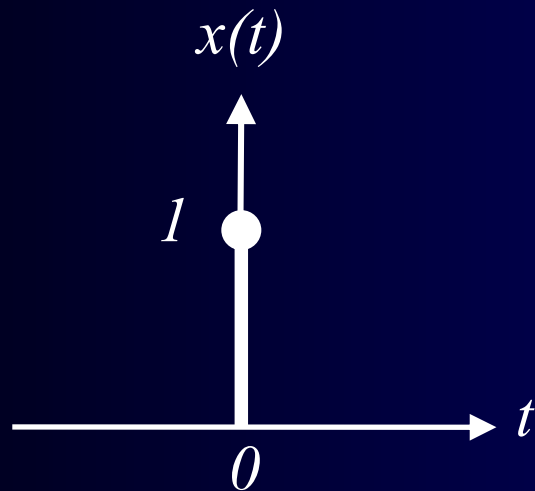
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) e^{-j\omega t} dt = 1$$



Fourier Transform of Delta function

- Fourier transform allied to delta function $\delta(t)$ equals to 1

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) e^{-j\omega t} dt = 1$$



重畳積分

- 時間領域の関数 $x_1(t)$, $x_2(t)$ に対して重畳積分(畳み込み積分)は以下のように求められる

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x_1(\tau) x_2(t - \tau) d\tau$$

- 記号*を用いた書き方

$$y(t) = x_1(t) * x_2(t)$$

Convolution Integral

- Convolution integral for time domain function $x_1(t)$, $x_2(t)$ can be obtained as follows

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x_1(\tau) x_2(t - \tau) d\tau$$

- Notation* may also be used

$$y(t) = x_1(t) * x_2(t)$$

重畳積分 (2)

- 時間領域の関数 $x_1(t)$, $x_2(t)$ の重畳積分 $y(t)$ のフーリエ変換 $Y(\omega)$ はそれぞれの時間域関数のフーリエ変換 $X_1(\omega)$, $X_2(\omega)$ の積になる

$$\begin{aligned} Y(\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} y(t) e^{-j\omega t} dt \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-j\omega t} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} x_1(\tau) x_2(t - \tau) d\tau \right] dt \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} x_1(\tau) \left[\int_{-\infty}^{+\infty} x_2(t - \tau) e^{-j\omega t} dt \right] d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} x_1(\tau) e^{-j\omega \tau} X_2(\omega) d\tau \\ &= X_1(\omega) X_2(\omega) \end{aligned}$$

Convolution Integral (2)

- Fourier transform $Y(\omega)$ of convolution integral $y(t)$ for time domain functions $x_1(t)$, $x_2(t)$ can be obtained by the multiplication of Fourier transform $X_1(\omega)$, $X_2(\omega)$ which correspond to $x_1(t)$, $x_2(t)$

$$\begin{aligned} Y(\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} y(t) e^{-j\omega t} dt \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-j\omega t} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} x_1(\tau) x_2(t - \tau) d\tau \right] dt \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} x_1(\tau) \left[\int_{-\infty}^{+\infty} x_2(t - \tau) e^{-j\omega t} dt \right] d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} x_1(\tau) e^{-j\omega \tau} X_2(\omega) d\tau \\ &= X_1(\omega) X_2(\omega) \end{aligned}$$

重畳積分定理 (3)

- 時間領域の関数 $x_1(t)$, $x_2(t)$ の積 $y(t)$ のフーリエ変換はそれぞれのフーリエ変換 $X_1(\omega)$, $X_2(\omega)$ の重畳積分 $Y(\omega)$ に $1/2\pi$ を掛けた値になる

$$\begin{aligned} Y(\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} y(t) e^{-j\omega t} dt \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} x_1(t) x_2(t) e^{-j\omega t} dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X_1(\sigma) X_2(\omega - \sigma) d\sigma \end{aligned}$$

- ここで、 $x_1(t)=x_2(t)$, $\omega=0$ であればParsevalの等式が得られる

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^2(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |X(\omega)|^2 d\omega$$

Convolution Integral (3)

- Fourier transform of function $y(t)=x_1(t)x_2(t)$ is convolution integral of $X_1(\omega)$ and $X_2(\omega)$ divided by $1/2\pi$

$$\begin{aligned} Y(\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} y(t) e^{-j\omega t} dt \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} x_1(t) x_2(t) e^{-j\omega t} dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X_1(\sigma) X_2(\omega - \sigma) d\sigma \end{aligned}$$

- We can obtain Parseval's theorem when $x_1(t)=x_2(t)$, $\omega=0$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^2(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |X(\omega)|^2 d\omega$$