

信号理論

- No.10 離散時間システム -

渡辺 裕

Signal Theory

- No.10 Discrete System -

Hiroshi Watanabe

システムの概念

- システムの構成要素
 - 入力, システム(処理ボックス), 出力
- 入出力の因果関係
 - 因果的 (Causal)
 - 何らかの入力(原因)が加えられたとき, それに対応する出力(結果)が生じる関係
 - 非因果的 (Non-causal)
 - 因果的ではない関係
- 動的システム
 - 入出力システムが瞬時的ではなく過渡応答が存在

System Concept

- System Element
 - Input, System(Processing Box), Output
- Relation of Input and Output
 - Causal
 - It is a relation when some input is fed into system, corresponding output can be appeared
 - Non-causal
 - Relation which is not causal
- Dynamic system
 - Input-output system is not static, but transient response exists

動的システムの種類 (1)

■ 連続系と離散系

ー 連続時間系

- 物質, 流量, エネルギーなど

ー 離散時間系

- デジタル信号, コンピュータシステムなど
- A/D変換によるサンプル処理が含まれる
- サンプル値系とも呼ばれる

■ 線形系と非線形系

ー 線形系

- $x_1 \rightarrow y_1, x_2 \rightarrow y_2$ なら $ax_1 + bx_2 \rightarrow ay_1 + by_2$

Dynamic System Classification (1)

- Continuous-time and discrete-time system
 - Continuous-time system
 - Material, flow, energy etc.
 - Discrete-time system
 - Digital signal, computer system etc.
 - Sampling process by A/D is included
 - It may be called sampled-data system
- Linear and non-linear system
 - Linear system
 - If $x_1 \rightarrow y_1$, $x_2 \rightarrow y_2$, we have $ax_1 + bx_2 \rightarrow ay_1 + by_2$

動的システムの種類 (2)

■ 集中定数系と分布定数系

ー 集中定数系

- 入出力と内部状態の関係が時間に関する常微分方程式で記述される

ー 分布定数系

- 入出力と内部状態の関係が時間と空間に関する偏微分方程式で記述される

■ 確定系と確率系

ー 確定系

- すべての時刻における内部状態と出力が一意に決定される

ー 確率系

- 内部状態が不規則的に変動する成分を含む場合

Dynamic System Classification (2)

- Lumped and distributed parameter system
 - Lumped parameter system
 - Relation of in/out put and internal state are described by ordinary differential equation with regard to time
 - Distributed parameter system
 - Relation of these states are described by partial differential equation with regard to time and space
- Deterministic and stochastic system
 - Deterministic system
 - Internal state and output at any time is determined uniquely
 - Stochastic system
 - Internal state has irregular variation

動的システムの種類 (3)

■ 時不変系と時変系

ー 時不変系

- 動的システムを微分方程式あるいは差分方程式でモデル化したとき, それらの係数が時間に関して一定

ー 時変系

- 上記で係数が時間変動を伴う場合

備考: 一般に数学モデルの係数が時間に関して一定ならば定常系(stationary system), 一定でなければ非定常系(non-stationary system)と呼ぶ

Dynamic System Classification (3)

- Time-invariant and time-varying system
 - Time-invariant system
 - When dynamic system is modeled by differential equation, its parameters are constant with regard to time
 - Time-varying system
 - Parameters above includes temporal fluctuation

Note: In general, if parameters of a mathematical model are constant with regard to time, it is called stationary system, otherwise, it is called non-stationary system

動的システムのモデル (1)

- システムが線形時不変系の場合には，入出力関係から伝達関数を求めることができる．
- 離散系では，時刻 t の入力を $u(t)$ ，出力を $y(t)$ としたとき，物理的に実現可能な因果律の満たされる動的システムは，以下の差分方程式を満たす．

$$\begin{aligned} y(t) + a_1 y(t-1) + \cdots + a_n y(t-n) \\ = b_0 u(t) + b_1 u(t-1) + \cdots + b_m u(t-m) \end{aligned}$$

$n \geq m$ ならプロパーと呼ぶ

Model of Dynamic System (1)

- Transfer function can be obtained from input and output relation when system is linear invariant.
- In discrete system, let input and output be $u(t)$ and $y(t)$ at time t . Dynamic system, which is practically realized and satisfies causality, holds the following differential equation..

$$\begin{aligned} & y(t) + a_1 y(t-1) + \cdots + a_n y(t-n) \\ &= b_0 u(t) + b_1 u(t-1) + \cdots + b_m u(t-m) \end{aligned}$$

It is called “proper” if $n \geq m$

動的システムのモデル (2)

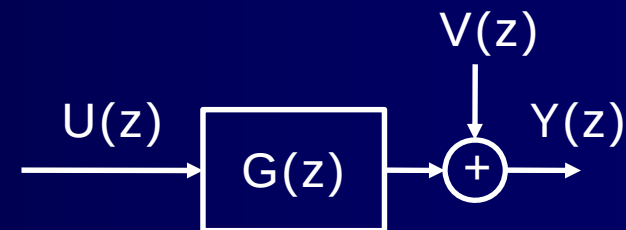
- 差分方程式をz変換

$$Y(z) = G(z)U(z)$$

$$G(z) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + \cdots + b_m z^{-m}}{1 + a_1 z^{-1} + \cdots + a_n z^{-n}}$$

- 出力 $Y(z)$ に外乱 $V(z)$ が加わる場合には

$$Y(z) = G(z)U(z) + V(z)$$



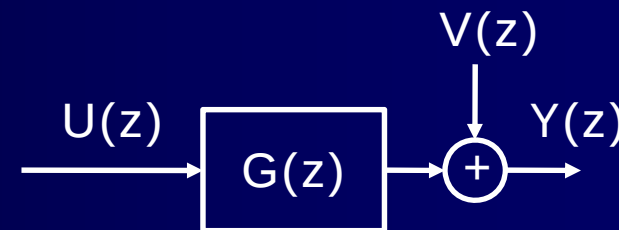
Model of Dynamic System (2)

- Apply z-transform to differential equation

$$Y(z) = G(z)U(z)$$
$$G(z) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + \dots + b_m z^{-m}}{1 + a_1 z^{-1} + \dots + a_n z^{-n}}$$

- When noise $V(z)$ is added to output $Y(z)$

$$Y(z) = G(z)U(z) + V(z)$$



z変換 (1)

- 入力信号 $x(n)$ に対して, サンプリングに関する単位遅延 $z = \exp(j\omega/2f_m)$ を規定すると, $x(n)$ のz変換および逆変換は次式で定義される.

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) z^{-n}$$
$$x(n) = \frac{1}{2\pi j} \oint_C X(z) z^{n-1} dz$$

 C : 複素平面における単位円上の周回積分

Z-Transform (1)

- To the input $x(n)$, by defining the unit delay regarding sampling as $z = \exp(j\omega/2f_m)$, z-transform and the Inverse transform of $x(n)$ can be given as

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)z^{-n}$$
$$x(n) = \frac{1}{2\pi j} \oint_C X(z)z^{n-1}dz$$

 C : Circular integration on the unit circle on the complex domain

z変換 (2)

- 離散時間信号 $x(n)$ に対する定常線形システム(フィルター)は, 入力信号 $x(t)$ とフィルタのインパルス応答 $h(n)$ の畳み込みで表される

$$y(n) = x(n) * h(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(n-k)x(k)$$

- インパルス応答 $h(n)$ において n が有限であれば, FIR (Finite Impulse Response) フィルタと呼ばれ, 無限に継続すれば, IIR (Infinite Impulse Response) フィルタと呼ばれる.

$$Y(z) = H(z)X(z)$$

Z-transform (2)

- Linear invariant system (filter) to the discrete signal $x(n)$ can be represented by convolution of the input $x(n)$ and filter's impulse response $h(n)$.

$$y(n) = x(n) * h(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(n-k)x(k)$$

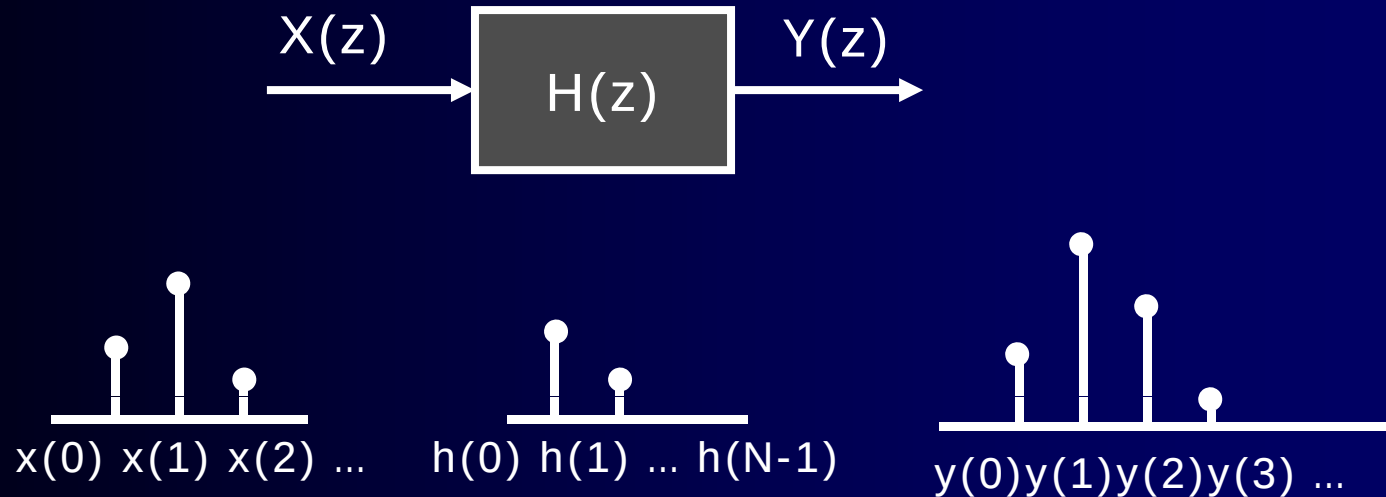
- The impulse response $h(n)$ is called FIR (Finite Impulse Response) filter when n is limited, and is called IIR (Infinite Impulse Response) filter if n is not limited.

$$Y(z) = H(z)X(z)$$

z変換 (3)

- 定常線形システムのz変換による表記

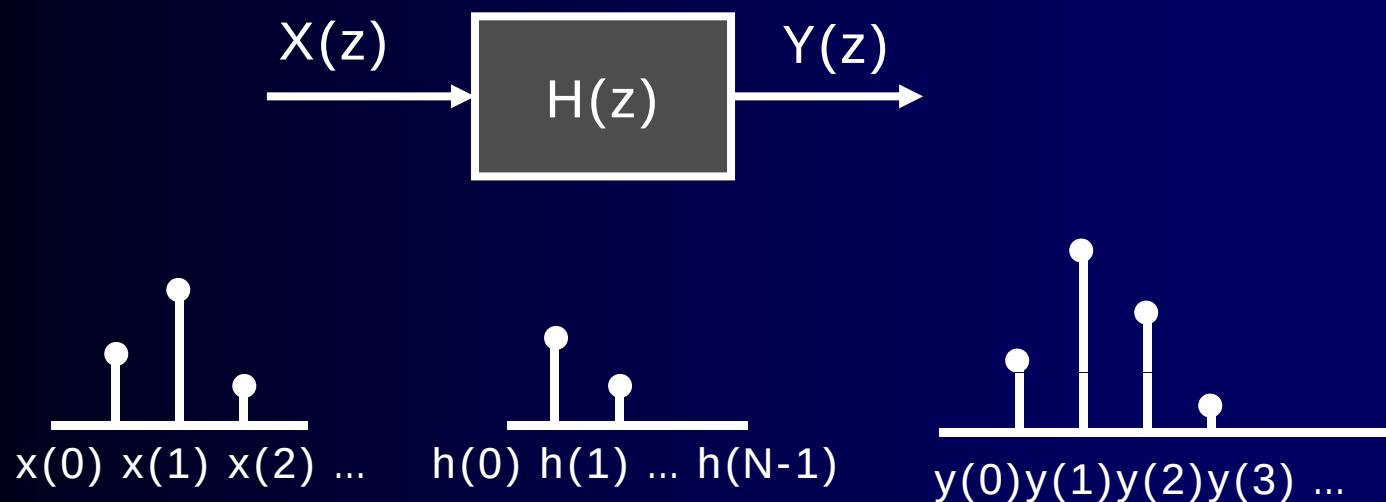
$$Y(z) = H(z)X(z)$$



Z-transform (3)

- Representation of linear invariant system by z-transform.

$$Y(z) = H(z)X(z)$$



状態変数モデル (1)

- 内部状態および入出力変数を n 階差分方程式で記述. 入力変数 r 個, 出力変数 l 個, 状態変数 n 個

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_r \end{bmatrix} \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad \mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_l \end{bmatrix}$$

- 状態方程式および出力方程式は, 関数 f, g により以下のように書ける

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(t+1) &= \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t) \\ \mathbf{y}(t) &= \mathbf{g}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t) \end{aligned}$$

State Variable Model (1)

- Internal state and input/output variables are described by n -th order differential equations. For r -input, l -output and n -state,

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_r \end{bmatrix} \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad \mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_l \end{bmatrix}$$

- State variable equation and output equation can be written by function f, g .

$$\begin{array}{l} \mathbf{x}(t+1) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t) \\ \mathbf{y}(t) = \mathbf{g}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t) \end{array}$$

状態変数モデル (2)

- 状態方程式と出力方程式を行列形式で記述すると

$$\mathbf{x}(t+1) = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}(t)\mathbf{u}(t)$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}(t)\mathbf{u}(t)$$

ここに, $\mathbf{A}(t)$ は $n \times n$ 係数行列 (coefficient matrix)

$\mathbf{B}(t)$ は $n \times r$ 駆動行列 (driving matrix)

$\mathbf{C}(t)$ は $l \times n$ 出力行列 (output matrix)

$\mathbf{D}(t)$ は $l \times r$ 伝達行列 (transmission matrix)

- 時不変の場合には, $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$, $\mathbf{D}$ は t の関数ではなくなる

State Variable Model (2)

- State variable equation and output equation in matrix form

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(t+1) &= \mathbf{A}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}(t)\mathbf{u}(t) \\ \mathbf{y}(t) &= \mathbf{C}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}(t)\mathbf{u}(t) \end{aligned}$$

where, $\mathbf{A}(t)$ is $n \times n$ coefficient matrix

$\mathbf{B}(t)$ is $n \times r$ driving matrix

$\mathbf{C}(t)$ is $l \times n$ output matrix

$\mathbf{D}(t)$ is $l \times r$ transmission matrix

- In case of invariant system, $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$, $\mathbf{D}$ are not functions with regard to time t

状態変数モデル (3)

- 伝達関数モデルと状態変数モデルの関係はz-変換により

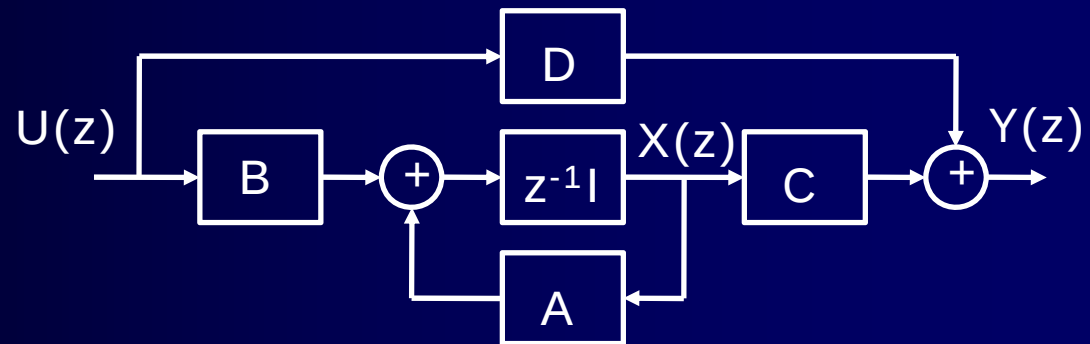
$$zX(z) = AX(z) + BU(z)$$

$$Y(z) = CX(z) + DU(z)$$

を変形して伝達関数行列 $G(z)$ を得る

$$Y(z) = G(z)U(z)$$

$$G(z) = C(zI - A)^{-1}B + D$$



State Variable Model (3)

- Relation of transfer function model and state variable mode are written by z-transform

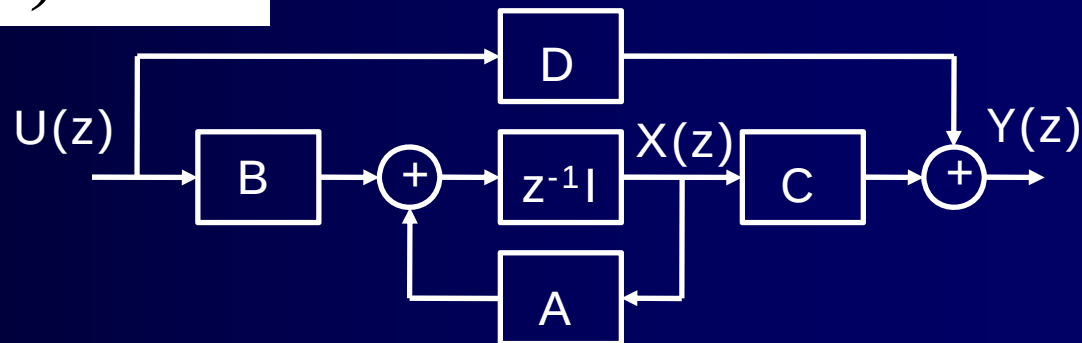
$$zX(z) = AX(z) + BU(z)$$

$$Y(z) = CX(z) + DU(z)$$

then, transfer function matrix $G(z)$ is obtained

$$Y(z) = G(z)U(z)$$

$$G(z) = C(zI - A)^{-1}B + D$$



可制御標準形

- 1入力1出力の線形時不変系

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(t+1) &= \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{b}(t)u(t) \\ y(t) &= \mathbf{c}^t \mathbf{x}(t) + du(t) \end{aligned}$$

- 可制御標準形 (Controllable canonical form)

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ -\alpha_n & -\alpha_{n-1} & -\alpha_{n-2} & \cdots & -\alpha_2 & -\alpha_1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{c} = \begin{bmatrix} \beta_n \\ \beta_{n-1} \\ \vdots \\ \beta_2 \\ \beta_1 \end{bmatrix}$$

Controllable Canonical Form

- Linear invariant system with 1-input and 1-output

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(t+1) &= \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{b}(t)u(t) \\ y(t) &= \mathbf{c}^t \mathbf{x}(t) + du(t) \end{aligned}$$

- Controllable canonical form

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ -\alpha_n & -\alpha_{n-1} & -\alpha_{n-2} & \cdots & -\alpha_2 & -\alpha_1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{c} = \begin{bmatrix} \beta_n \\ \beta_{n-1} \\ \vdots \\ \beta_2 \\ \beta_1 \end{bmatrix}$$

可観測標準形

- 1入力1出力の線形時不変系

$$\begin{aligned}\mathbf{x}(t+1) &= \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{b}(t)u(t) \\ y(t) &= \mathbf{c}^t \mathbf{x}(t) + du(t)\end{aligned}$$

- 可観測標準形 (Observable canonical form)

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -\alpha_n \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -\alpha_{n-1} \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & -\alpha_{n-2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & -\alpha_2 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -\alpha_1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} \beta_n \\ \beta_{n-1} \\ \beta_{n-2} \\ \vdots \\ \beta_2 \\ \beta_1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{c} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Observable Canonical Form

- Linear invariant system with 1-input and 1-output

$$\begin{aligned}\mathbf{x}(t+1) &= \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{b}(t)u(t) \\ y(t) &= \mathbf{c}^t \mathbf{x}(t) + du(t)\end{aligned}$$

- Observable canonical form

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -\alpha_n \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -\alpha_{n-1} \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & -\alpha_{n-2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & -\alpha_2 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -\alpha_1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} \beta_n \\ \beta_{n-1} \\ \beta_{n-2} \\ \vdots \\ \beta_2 \\ \beta_1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{c} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

伝達関数

- パルス伝達関数 (Pulse transfer function) $G(z)$

$$G(z) = \frac{\beta_1 z^{-1} + \beta_2 z^{-2} \cdots + \beta_n z^{-n}}{1 + \alpha_1 z^{-1} + \cdots + \alpha_n z^{-n}} + d$$

- 係数変換

$$\gamma_i = \begin{cases} d, & i = 0 \\ \alpha_i + \beta_i, & i = 1, 2, \dots, n \end{cases}$$

$$G(z) = \frac{\gamma_0 + \gamma_1 z^{-1} + \cdots + \gamma_n z^{-n}}{1 + \alpha_1 z^{-1} + \cdots + \alpha_n z^{-n}}$$

Transfer Function

- Pulse transfer function $G(z)$

$$G(z) = \frac{\beta_1 z^{-1} + \beta_2 z^{-2} \cdots + \beta_n z^{-n}}{1 + \alpha_1 z^{-1} + \cdots + \alpha_n z^{-n}} + d$$

- Convert coefficients

$$\gamma_i = \begin{cases} d, & i = 0 \\ \alpha_i + \beta_i, & i = 1, 2, \dots, n \end{cases}$$

$$G(z) = \frac{\gamma_0 + \gamma_1 z^{-1} + \cdots + \gamma_n z^{-n}}{1 + \alpha_1 z^{-1} + \cdots + \alpha_n z^{-n}}$$

例

- 加法的雑音 $V(z)$ のあるFIRフィルタ $H(z)$, 入力 $U(z)$, 出力 $Y(z)$

$$Y(z) = H(z)U(z) + V(z)$$

$$H(z) = \sum_{i=1}^n h_i z^{-i}$$

$$\mathbf{x}(t+1) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{b}u(t)$$

$$y(t) = \mathbf{c}^t \mathbf{x}(t) + v(t)$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{c} = \begin{bmatrix} h_n \\ h_{n-1} \\ \vdots \\ h_2 \\ h_1 \end{bmatrix}$$

Example

- FIR filter $H(z)$, input $U(z)$, output $Y(z)$ with additive noise $V(z)$

$$Y(z) = H(z)U(z) + V(z)$$

$$H(z) = \sum_{i=1}^n h_i z^{-i}$$

$$\mathbf{x}(t+1) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{b}u(t)$$

$$y(t) = \mathbf{c}^t \mathbf{x}(t) + v(t)$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{c} = \begin{bmatrix} h_n \\ h_{n-1} \\ \vdots \\ h_2 \\ h_1 \end{bmatrix}$$

可制御性と可観測性

■ 離散系の可制御性

- 離散系の状態方程式において、任意の初期状態 $x(0)=x_0$ および任意の望ましい最終状態 x_f が与えられたとき、有限時間で x_0 を x_f に移す制御入力 $u(t)$ が存在すれば、システムは可制御であるという。

■ 離散系の可観測性

- 離散系の状態方程式において、入力 $u(t)$ が既知のとき、時刻 $t=0$ からある有限区間における出力 $y(t)$ の観測値を用いて、初期状態 $x(0)$ を一意的に決定することができれば、システムは可観測であるという。

Controllability and Observability

- Controllability in discrete system
 - On state equation in discrete system, when arbitrary initial status $x(0)=x_0$ and arbitrary desired final status x_f are given, if control input $u(t)$ that convert x_0 to x_f in a certain time period exists, system is called controllable.

- Observability in discrete system
 - On state equation in discrete system, input $u(t)$ is known, if the initial state $x(0)$ can be uniquely determined by using observed value of output $y(t)$ for certain period from time $t=0$, system is called observable.