

## フレーム展開による画像の多重記述符号化に関する検討

石川 孝明<sup>†1</sup> 渡辺 裕<sup>†2</sup>

本研究では、多重記述符号化における冗長度制御を行うために、符号化対象の係数群をヒルベルト空間の元で表現し、冗長係数群を凸結合で表現する。提案法において、冗長な係数群は符号化対象の係数群を直交射影した元と重み付けパラメータにより表現され、任意の冗長度を表現可能である。実験により、提案法が係数群の冗長性を制御可能であることを示し、フレーム展開を利用することで従来法と比較して符号化効率が最大で約 2[dB] 向上した。

### A Study on Multiple Description Image Coding with Frame Expansion

TAKA AKI ISHIKAWA<sup>†1</sup> and HIROSHI WATANABE<sup>†2</sup>

We propose a new method to control signal redundancy for multiple description coding. We describe redundant coefficients of transformed images as a vector in Hilbert space. The redundant coefficients are weighted sum of orthogonal decomposition of frame coefficients. We use an overcomplete transform to encode input images into multiple descriptions more efficiently. Our experimental result shows that the proposed method controls the signal redundancy and improves coding efficiency about 2[dB] when compared to the conventional method.

#### 1. ま え が き

パケットロスが生じる信頼性の低いネットワークを用いた画像や映像の伝送では、最終的

な再生品質がネットワーク環境に大きく影響される。そのため、伝送後の再生品質を高く保つためには、ビットストリームに適切な量の冗長な情報を加える必要がある。

情報源符号化と通信路符号化を独立に考えれば、Forward Error Correction (FEC) とそのインターリーブによる冗長化が一般的である。FEC は、情報源符号化により得られるビットストリームを複数のパケットに区分し、冗長ビットを付加することで損失したパケットの回復を可能としている。しかし、設定した冗長度を超えるエラーが生じる場合には誤り訂正が困難となり、画像や映像の再生品質を極端に低下させる要因となる。また、パケットの冗長化はビットレベルで行われ、必ずしも入力画像の特徴が反映されるとは限らない。

これに対し、情報源符号化と通信路符号化を独立に考えず、情報源符号化において冗長化を行う Multiple Description Coding (MDC) がある。MDC は、情報を複数のビットストリームに分割符号化する方式であり、符号化時に複数ビットストリームの関係性を利用した冗長化が可能である。各ビットストリームを独立な通信路を用いてクライアントに伝送することで、パケットロスの影響を分散することができる。また、チャネルの切断数の増加に対応して再生品質が低下する性質があるため、バーストエラーにおいても途切れない通信が可能となる。

画像の多重記述符号化においては、信号の分割を画素レベルもしくは変換係数レベルで行う。入力画像をサブサンプリングする手法<sup>1)</sup> は、分割後の画像間に高い相関が残されるため、ビットストリーム全体の冗長度は高くなる。このような方式は、ネットワークのエラーレートが高い場合に適している。一方、変換係数を分割する手法は、離散コサイン変換や離散ウェーブレット変換などにより得られる変換係数を複数の係数群に分割する<sup>2)3)</sup>。これにより、係数群同士の相関は失われるがビットストリーム全体の冗長度を低く抑えることが可能となる。これはエラーレートの低い場合に適している。このように、変換符号化における信号相関の扱いにより、MDC におけるビットストリーム間の冗長度が変化する。Wang らは、変換係数に冗長性を付加する行列演算を定義することで、ビットストリーム間の冗長度を直接的に制御する方式を示している<sup>4)</sup>。同手法は、2 変数を対象としているため N 次元への拡張が必要となる。

そこで本検討では、信号の冗長度を分割数によらずに制御することを目的として、冗長な信号をヒルベルト空間における元として表現する。これにより、ネットワークのエラーレートに応じて適切な量の冗長な情報を有する複数ビットストリームを生成可能になると考えられる。また、MDC の符号化効率全体に影響する入力信号の変換方法について、従来の基底展開ではなくフレーム展開の適用を検討する。

<sup>†1</sup> 早稲田大学 国際情報通信研究センター

Global Information and Telecommunication Institute of Waseda University

<sup>†2</sup> 早稲田大学 国際情報通信研究科

Graduate School of Global Information and Telecommunication Studies of Waseda University

2. では、従来法として離散ウェーブレット変換の係数を分割する手法<sup>3)</sup>について述べる。また、フレーム展開を利用した信号の冗長度制御法について述べる。3. では、MDC で符号化対象とすべき冗長な係数群をヒルベルト空間の元として表現し、提案手法の処理手順を示す。4. では提案方式の評価実験を行い、有効性を示す。5. で本検討をまとめる。

## 2. 従来手法

本章では、多重記述符号化の従来方式とフレーム展開について述べる。はじめに Bajic らの Dispersive Packetization<sup>3)</sup> を概説し、次にフレーム展開を用いた冗長度制御手法について述べ、最後に過完備系の変換である複素ウェーブレット変換について述べる。

### 2.1 Dispersive Packetization

Bajic らが提案する Dispersive Packetization (DP) は、ウェーブレット変換後の係数群をラティスによる数学的技法により均等分割し、 $P$  本のビットストリーム (パケット) を生成する方式である。以下に具体的な処理手順を示す。

まず、ウェーブレット係数で構成される 2 次元画像を  $\mathbb{Z}^2$  ラティスの部分空間  $\mathcal{D}$  とし、式 (1) を満たすように  $P$  分割する。

$$\bigcup_{i=0}^{P-1} S_i = \mathcal{D}, \quad S_i \cap S_j = \emptyset, \quad i \neq j \quad (1)$$

分割数  $P$  は、式 (2) で与えられる。 $v_1$  と  $v_2$  がなす領域に含まれるサンプルの数が分割数  $P$  であり、 $v_1$  と  $v_2$  で構成されるベクトル  $V$  の行列式で表される。

$$P = |\det V|, \quad V = \begin{bmatrix} v_{1(x)} & v_{2(x)} \\ v_{1(y)} & v_{2(y)} \end{bmatrix} \quad (2)$$

次にラティスによる均等分割を、ウェーブレット変換後の低域サブバンド信号に対して行う。分割数  $P$  までのインデックスが各係数に割り振られ、分割はユークリッド空間における 2 点間の距離を最短に保つように行われる。

最後に、低域サブバンド信号のインデックス情報を元に高域サブバンドの係数群にインデックスを割り振る。高域サブバンド係数群に対する処理は、モジュロを利用した計算式 (3) により行われ、割り振られるインデックスは一意的に定められる。 $N$  は、サブバンドの総数を表し、高域サブバンドはラスタ順に処理される。1 段のウェーブレット変換であれば、対象サブバンドは  $N = 4$ 、2 段のウェーブレット変換では、 $N = 7$  となる。 $x$  は、低域サ

ブバンドの座標を表し、 $p(x)$  はそのインデックスを表している。

$$p^{(k)}(x) \triangleq (p(x) + k) \bmod P, \quad k = 0, 1, \dots, N - 1. \quad (3)$$

このように全係数を  $P$  種類のインデックスにて表現した後、同じインデックスの係数を集めて 1 つの係数集合とし、個別に符号化する。したがって各ビットストリームは、ラティスにより分割された低域サブバンド信号とそれ以外のサブバンドの係数群を均等に含む。

このモデルにおいて 1 つのビットストリームが欠落することは、あるインデックスの係数群すべてを失うことを意味する。デコーダ側では、欠落した係数を周囲の係数から補間することが可能であり、4 分割の場合には低域サブバンドについて 2 次の線形補間、高域サブバンドについて 1 次の線形補間を用いることができる。ただし、HH サブバンドについては補間処理を行わない。同手法は、Embedded Zero Tree Wavelet (EZW) のロバスト改良方式である Packetizable Zero tree Wavelet (PZW) よりも優れた符号化効率を示している。一方で、補間の効果は低域サブバンドに集中しており、高域サブバンドでは必ずしも効果的ではない。

### 2.2 フレーム展開による信号の冗長化

本節では、フレーム展開による信号の冗長化について述べる。まずフレームの定義について述べ、代表的なフレームである MB フレームを用いた信号の冗長化について述べる。

#### 2.2.1 フレームの定義

フレームは次のように定義される。ヒルベルト空間  $\mathcal{H}$  における関数の族  $\{\phi_j\}_{j \in J}$  について、定数  $A, B$  が  $0 < A \leq B < \infty$  を満たし、任意の関数  $f \in \mathcal{H}$  について式 (4) が成立するとき、関数の族  $\{\phi_j\}_{j \in J}$  はフレームをなすという<sup>5)6)</sup>。

$$A \|f\|^2 \leq \sum_{j \in J} |\langle f, \phi_j \rangle|^2 \leq B \|f\|^2 \quad (4)$$

式 (4) の  $A$  と  $B$  はフレーム限界と呼ばれ、 $f$  が安定に再構成可能であるための制限である。フレーム限界が  $A = B$  であるときをタイトフレームという。 $A = B = 1$  かつ  $\|\phi_j\| = 1$  であるとき、関数の族  $\{\phi_j\}_{j \in J}$  は、ヒルベルト空間  $\mathcal{H}$  の正規直交基底である。

#### 2.2.2 フレーム展開

フレームには右逆行列が存在しないが、入力信号を一意的に展開することは可能である。 $M$  行  $N$  列で表される行列  $F$  において、 $F$  の行ベクトル  $\{\phi_j\}$  が  $\mathbb{C}^N$  に対するフレームをなすとする。このとき、 $\{\phi_j\}$  の双対フレーム  $\{\tilde{\phi}_j\}$  を用いると、

$$f = \sum_{j \in J} \langle f, \phi_j \rangle \tilde{\phi}_j = \sum_{j \in J} \langle f, \tilde{\phi}_j \rangle \phi_j \quad (5)$$

とフレーム展開され、フレームがタイトフレームであるならば、

$$f = \frac{1}{A} \sum_{j \in J} \langle f, \phi_j \rangle \phi_j \quad (6)$$

と展開される。双対フレーム  $\{\tilde{\phi}_j\}$  を列ベクトルとする  $F^+$  を疑似逆行列と呼び、

$$F^+ = (F^* F)^{-1} F^* \quad (7)$$

と表される。 $F^*$  は  $F$  の随伴行列でありフレームでは  $F^+ F = I$  が成り立つ。タイトフレームにおいては、フレーム限界  $A$  が冗長率を表しており、正規直交基底では  $A = B = 1$  であるため、冗長ではない信号表現である。

### 2.2.3 MB フレーム

Mercedes-Benz (MB) フレームは、代表的なタイトフレームである<sup>7)</sup>。式(8)にMBフレームを示す。

$$\begin{aligned} \phi_1 &= (0, 1) \\ \phi_2 &= (-\sqrt{3}/2, -1/2) \\ \phi_3 &= (\sqrt{3}/2, -1/2) \end{aligned} \quad (8)$$

このフレームを利用すると入力信号  $x \in \mathbb{C}^2$  は、式(6)を用いて式(9)のように展開される。

$$x = \frac{2}{3} \sum_{j=1}^3 \langle x, \phi_j \rangle \phi_j \quad (9)$$

フレーム限界は  $A = 3/2$  であるので、このフレーム展開を用いるとフレーム係数による1.5倍の冗長な信号表現となる。展開により得られるフレーム係数と式(10)を解いて得られる双対フレームにより、入力信号  $x$  は再構成される。

$$\tilde{\phi}_j = (F^* F)^{-1} \phi_j \quad (10)$$

文献<sup>8)</sup>では、式(4)のフレーム限界をパラメータとしてMBフレームによるウェーブレット係数の冗長化方式について述べている。しかし、フレーム限界を制御パラメータとする場合には、フレームベクトルで構成される行列のサイズが冗長率を表すため、有理数の冗長率を表現する行列は、行列サイズが大きくなり変換コストが高くなる。

## 2.3 複素ウェーブレット変換

本節では、複素ウェーブレット変換について概説する。

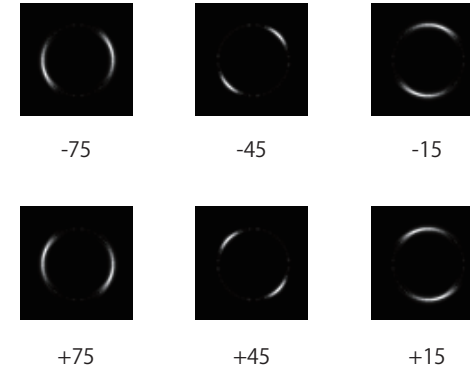


図1 複素ウェーブレット変換のサブバンド画像  
Fig.1 Subband images of CWT.

### 2.3.1 変換係数の特徴

Dual Tree Complex Wavelet Transform (DTCWT) は、6種類の方向分離特性やシフト不変性などの特徴を有する変換手法である。複数の離散ウェーブレット変換により得られる変換係数を組み合わせることで、複素信号を構成することが可能である。変換係数が複数であるため、実数のウェーブレット変換と比較し、画像を表現する基底関数の種類が豊富であり、入力画像が曲線などエッジ成分多く含む場合に効率よく表現することができる。図1に、離散ウェーブレット変換により得られるサブバンド画像を示す。入力画像は、一定の幅を持つ円が描かれた画像である。6種類のサブバンドに、それぞれ異なる方向のエッジ成分が検出されていることがわかる。

このような特性を持つDTCWTは、実数のウェーブレット変換と比較して4倍の変換係数を有する冗長な変換である。これは、複素ウェーブレット変換における複素信号が、複素空間の基底関数ではなく、実部と虚部を実数空間の基底関数の集合で展開しているためである。したがって、DTCWTはフレーム展開である。

### 2.3.2 変換係数の最適化

入力画像に対するDTCWT係数は信号に変化が無いような特別な場合を除いて零係数を含まない。そのため、符号化対象となる係数がDWTと比較して4倍に増加する。そこでKingsburyらは、NoiseShapingと呼ばれる係数の最適化手法を提案している<sup>9)</sup>。同手法は、複素ウェーブレット変換で得られる係数群を初期元とし、非零係数を生成する空間と再構成

時の品質を保存する空間を交互に射影することで非零係数の数を限定し、射影により生じるノイズを最小化している。このような最適化処理により、4倍に増加した変換係数を所定の数の非零係数に置き換えることが可能である。同方式を応用した画像符号化方式も提案されており、JPEG2000などの符号化方式よりも高い符号化効率を実現している<sup>10)</sup>。

### 3. 提案方式

本章では、提案する多重記述符号化方式について述べる。まず始めに、冗長な係数群をヒルベルト空間の元として定式化する。次に、複素ウェーブレット変換を用いる全体の処理手順について述べる。

#### 3.1 ヒルベルト空間における冗長係数群の表現

本節では、MDCの符号化対象となる係数群をヒルベルト空間上の元として表現する。

##### 3.1.1 従来手法との対応関係

第2章で述べたLatticeによる変換係数の分割は、ヒルベルト空間における直交分解を意味している。分割前の係数群を  $x \in \mathcal{H}$  とするならば、分割後の係数群は直交するLatticeに対して  $x$  を射影した元である。射影先の空間は、Latticeのインデックスに対応している。この概念はLatticeに限定されず、Wangら手法<sup>4)</sup>のように分割後の係数群の相関が最小になるような空間に設定することも考えられる。射影により求めた元を、エラーの生じない複数の通信路で分割伝送すれば、受信側で  $x$  を完全に再生することができる。この時、信号の冗長度は1である。

一方で、通信路でのエラーレートが高い場合には、分割後の係数群が分割前の係数群に対してより近い距離に存在する必要があると考えられる。 $x$  を2分割するモデルについて、通信路全体のエラーレートが50%であっても受信側で  $x$  を再生するためには、分割後の2つの元が共に  $x$  である必要がある。すなわち、信号の冗長度は2である。

このように、冗長度1では直交分解した元を分割伝送し、冗長度2では  $x$  を複製して伝送すれば、冗長度に応じた最適なビットストリームを伝送可能であると考えられる。図2に、分割数が2の場合の直交分解を示す。入力信号を変換して得られる分割対象の元が  $x$  であり、射影した元が  $a$  である。

冗長な信号成分が増えると、対応する係数群のL2ノルムは徐々に増加するので、信号の冗長度が1以上2以下における冗長な係数群は、 $x$  と  $a$  の中間に位置すると考えられる。そこで、本検討では冗長な係数群をヒルベルト空間上の  $x$  と  $a$  との凸結合により表現する。すなわち、冗長な係数群を表す元  $a_\lambda$  は、式(11)で表される。凸結合の条件から、パラ

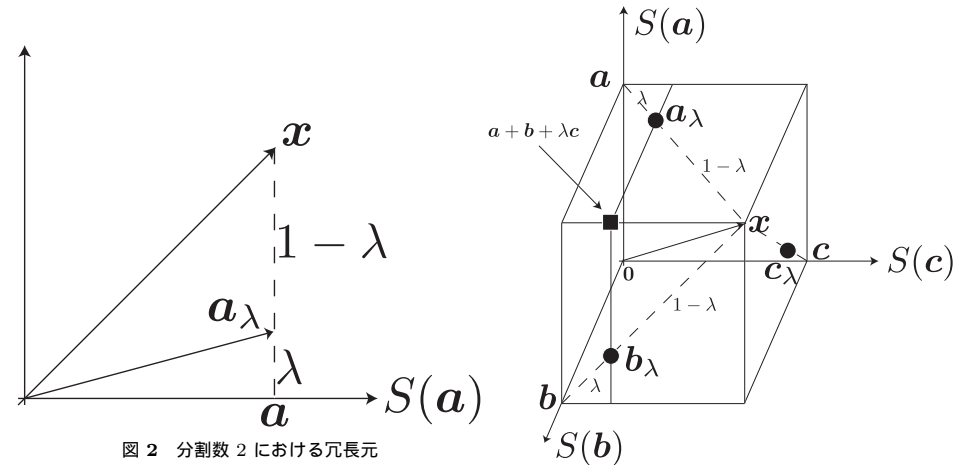


図2 分割数2における冗長元  
 Fig.2 Redundant vector (M=2).

図3 分割数3における冗長元  
 Fig.3 Redundant vector (M=3).

メータ  $\lambda \in E^n$  は、非負の値である。

$$a_\lambda = (1 - \lambda)a + \lambda x \quad (11)$$

##### 3.1.2 M分割における表現

前節の概念に基づき、任意の冗長度において最適と考えられるヒルベルト空間上の元を  $\lambda$  を用いて表現する。図3に変換係数を3分割する例を示す。直交分解した元  $a, b, c$  に対して、冗長な元は、式(12)のように、 $a_\lambda, b_\lambda, c_\lambda$  として表現される。さらに式(13)を代入することで、冗長な係数群を表す元からは、 $x$  が消え、式(14)のように、直交分解で得られる元をパラメータ  $\lambda$  で合成した元で表される。

$$a_\lambda = (1 - \lambda)a + \lambda x, \quad b_\lambda = (1 - \lambda)b + \lambda x, \quad c_\lambda = (1 - \lambda)c + \lambda x \quad (12)$$

$$x = a + b + c \quad (13)$$

$$a_\lambda = a + \lambda(b + c), \quad b_\lambda = b + \lambda(a + c), \quad c_\lambda = c + \lambda(a + b) \quad (14)$$

##### 3.1.3 欠落時の係数再構成

図3に示した分割数3における例を用いて、伝送する時に情報が欠落した場合の係数の再構成について述べる。

- 2つの元が欠落する場合

$a_\lambda$  および  $b_\lambda$  が欠落する場合、受信側には、 $c_\lambda$  のみが伝送される。受信側では、他に

利用する情報が無い場合、 $c_\lambda$  を利用して再構成画像を得る。この時、冗長成分である  $\lambda(a+b)$  だけ、 $c$  よりも  $x$  に近づく。

● 1 つの元が欠落する場合

$a_\lambda$  が欠落する場合、受信側には  $b_\lambda$  および  $c_\lambda$  が伝送される。それぞれを  $S(a)$  と  $S(b)$  に射影することで、 $b$  および  $c$  が得られる。さらに、 $S(c)$  に射影することで、 $\lambda c$  が得られる。最終的にこれらの元を加算することで受信側では、 $a+b+\lambda c$  なる係数群を再構成する。 $\lambda$  は、 $0 \leq \lambda \leq 1$  であるから、 $\|x-a_\lambda\| = \|x-a-\lambda c-\lambda b\| \geq \|x-a-\lambda c-b\|$  となり、再構成した元は受信した 1 つの元よりも  $x$  に近い。

$S(c)$  への射影で得られる元  $\lambda c_a$  と  $\lambda c_b$  は、一般に量子化による影響から同一の元ではなく、異なる元であると考えられる。したがって、これらの異なる元の扱いより、再構成した元の精度は変化する。異なる量子化により得られる元を加算平均した元については、個々の量子化ノイズ成分が打ち消され、真値に近づく場合があることが知られている。そこで、本検討では加算平均した値を  $\lambda c$  として用いる。

### 3.2 提案方式の流れ

本節では、提案方式の処理手順について述べる。符号化器側では、1) フレーム展開による疎表現係数群の導出、2) 係数群の分割および冗長度制御を行い、復号器側では、3) 係数の合成を行う。具体的な手順の内容を以下に示す。

(1) フレーム展開による疎表現係数群の導出

本提案方式では、第 2 章で述べた複素ウェーブレット変換を利用する。変換係数は、完備系の変換と比較して冗長に発生するが、Noise Shaping による最適化処理を行い、非零係数の数が制限された係数群を多重記述符号化における分割対象とする。

(2) 係数群の分割および冗長度制御

本手法では、信号の冗長性を係数空間で導入する。はじめに、最適化された疎な係数群を入力とし直交分解する。直交分解には、Bajic らの提案する Lattice を利用する。各係数は、均等に分割されるため、係数エネルギーもほぼ均等に分けられると考えてよい。次に、分割数が  $M$  である場合の冗長な係数群を表す式 (15) を用いて信号間の冗長度を  $\lambda$  により制御する。生成した各信号列には、直交分解に用いた Lattice の種別を示すフラグを付ける。

$$y_\lambda(i) = (1-\lambda)y(i) + \lambda \sum_{j=1}^M y(j) \quad (15)$$

(3) 係数の合成

復号器側では受信できた信号系列を利用して係数分割前の元の再構成を行う。まずはじめに、ラティスの種別を表すフラグを元に、各係数群を主となる軸に射影する。次に、係数の欠落している軸についてもそれぞれ射影し、欠落係数について再構成の候補となる係数を得る。2 つ以上の重なりを持って多重化されている場合には、複数の候補が得られるため、各係数群を加算平均した元を採用し、他の係数群と合算する。再構成した係数群を逆変換することで再構成画像を得る。

## 4. 評価実験

提案方式の有効性を確認するための評価実験を行う。

### 4.1 実験条件

実験には、 $512 \times 512$ [pel] (グレースケール) の Lena と Barbara を用いた。従来手法は、9/7-Daubechies フィルタを用いた離散ウェーブレット変換を Lattice 分割する方式である。提案手法で利用する複素ウェーブレットは、第 1 レベルを 13-19 タップの双直交フィルタ、第 2 レベル以降を 14 タップの直交フィルタを使用し、Noise Shaping による係数最適化を行う。ただし、使用するパラメータは実験的に定めた。全ての実験において、係数の分割数は 4 であり、係数は独立に線形量子化した。情報量は量子化係数のエントロピーである。

### 4.2 エラーが生じない環境における結果

パケットエラーが生じない場合における符号化効率を図 4 と図 5 に示す。前者が Lena の結果であり、後者が Barbara の結果である。どちらの画像についても複素ウェーブレット変換を利用する場合が効率が良い。Barbara での PSNR の向上は、複素ウェーブレット変換の係数方向選択性により効率的な係数表現が行われたためと考えられる。以上から、多重記述符号化の符号化効率が、分割対象の係数群の変換方式の影響を受けることがわかる。

### 4.3 伝送路のエラーレート変動

各係数群を伝送するチャネルにバーストエラーが生じることを想定し、分割係数群を、1 から 3 まで欠落させた場合の伝送効率を評価する。図 6 は、提案方式における Lena を MDC 全体で 0.5[bpp] に符号化した実験結果である。図 6 より、パケットロスが生じない場合は、冗長度  $\rho = 1.0$  の場合が最も効率が高く、冗長度  $\rho = 3.25$  の場合が最も悪い。この結果は、多重化される冗長な情報が増加するに伴い、ビットストリームの符号化効率が低下することに合致する。一方、パケットロスが生じると、最も効率のよいビットストリームは冗長度  $\rho$  に応じて変化することがわかる。これは、提案法が冗長度を制御可能であることを示して

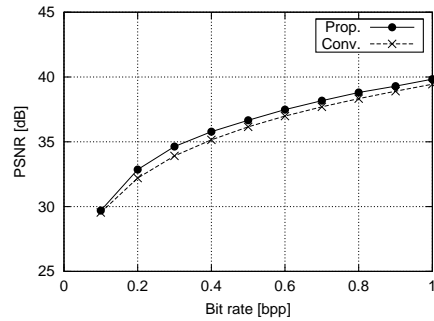


図 4 4 分割時の符号化効率 (Lena).  
Fig. 4 R-D Curve (Lena).

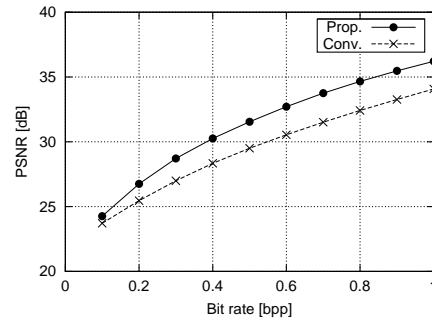


図 5 4 分割時の R-D (Barbara).  
Fig. 5 R-D Curve (Barbara).

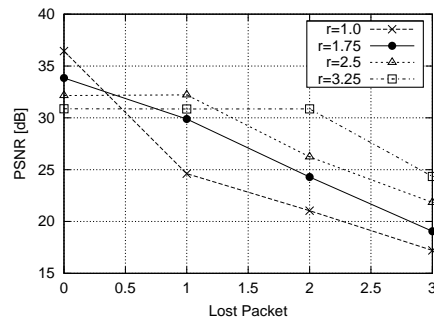


図 6 冗長度の制御 (Lena, 0.5[bpp])  
Fig. 6 redundancy control (Lena, 0.5[bpp]).

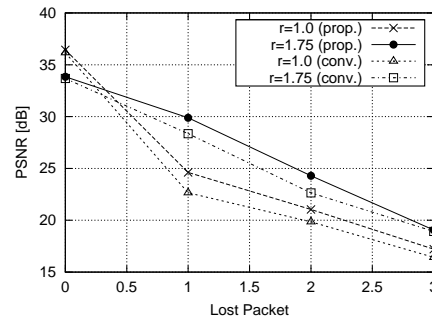


図 7 冗長度制御と変換手法の比較 (Lena, 0.5[bpp])  
Fig. 7 Comparison under redundancy control (Lena, 0.5[bpp]).

いる。

次に、従来手法との比較を行う。図 7 に冗長度が  $\rho = 1.0$  および  $\rho = 1.75$  における結果を示す。図 7 より、提案法は、分割対象となる係数群を得るための変換方式に依存せず冗長度を制御できることがわかる。また、提案法の効率は従来法を上回っており、有効性が確認できる。

## 5. む す び

本検討では、フレーム展開により信号を冗長化する方式を提案した。提案法は、冗長な係数群をヒルベルト空間上の元として定式化することで、パラメータによる冗長度の制御を可能とした。また、過完備系の変換方式を利用することで、従来法よりも通信路の PACKET ロスの有無によらず符号化効率が改善することを示した。

## 参 考 文 献

- 1) 松村宏基, 藤井俊章, 谷本正幸: サブサンプリングを用いたマルチストリーム動画伝送方式の検討, *AVM39*, pp.29–34 (2002).
- 2) Matty, K.R. and Kondi, L.P.: Balanced Multiple Description Video Coding Using Optimal Partitioning of the DCT Coefficients, *IEEE Trans. on Circuits and Systems for Video Technology*, Vol.15, No.7, pp.928–934 (2005).
- 3) Bajic, I.V. and Woods, J.W.: Domain-Based Multiple Description Coding of Image and Video, *IEEE Trans. on Image Processing*, Vol.12, No.10, pp.1211–1225 (2003).
- 4) Wang, Y., Reibman, A.R., Orchard, M.T. and Jafarkhani, H.: An Improvement of Multiple Description Transform Coding, *IEEE Trans. on Signal Processing*, Vol.50, No.11, pp.2843–2854 (2002).
- 5) Daubechies, I.: *Ten Lectures On Wavelets*, Society for Industrial and Applied Mathematics (1992).
- 6) Christensen, O.: *An Introduction to Frames and Riesz Bases*, Birkhauser (2002).
- 7) Kovacevic, J., Dragotti, P.L. and Goyal, V.K.: Filter Bank Frame Expansions With Erasures, *IEEE Trans. on Information Theory*, Vol.48, No.6, pp.1439–1450 (2002).
- 8) 石川孝明, 渡辺裕: フレーム展開による信号の冗長度制御方式に関する検討, *信学技報*, Vol.108, No.127, pp.61–66 (2008). IE2008-43.
- 9) Reeves, T.H. and Kingsbury, N.G.: Overcomplete Image Coding Using Iterative Projection-Based Noise Shaping, *IEEE ICIP*, Vol.3, No.3, pp.597–600 (2002).
- 10) J. Yang, Y. Wang, W.X. and Dai, Q.: Image Coding Using Dual-Tree Discrete Wavelet Transform, *IEEE Trans. on Image Proc.*, Vol.17, No.9, pp.1555–1569 (2008).